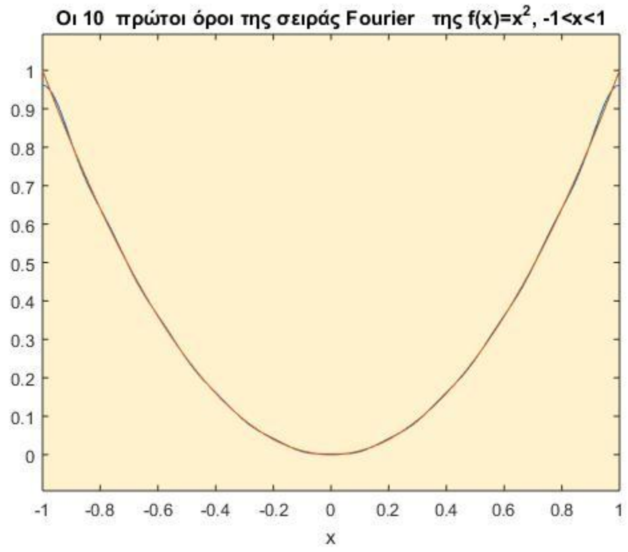


17.5 Μετασχηματισμός Fourier

Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Fourier** (αν υπάρχει) μίας πραγματικής ή γενικότερα μιγαδικής συνάρτησης $f(t)$ της πραγματικής μεταβλητής t τη συνάρτηση

$$F(\omega)=F\left\{f(t)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

όπου ω πραγματική μεταβλητή.
Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ υπάρχει, αν το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αλλιώς, δηλαδή αν το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει, τότε δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$.

Εντολή MATLAB	`fourier(f(t),t,w)`	Εύρεση του μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης $f(t)$.

Παράδειγμα 17.10

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων:

α) $f(t)=t^2e^{-3t}u(t)$ β) $f(t)=t^2\sin 2te^{-3t}u(t)$ γ) $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$

Λύση

α) Αφού ορίσουμε ως syms τις μεταβλητές t, w και τη βηματική συνάρτηση $u(t)$ (`heaviside(t)`) χρησιμοποιούμε την εντολή `fourier(f(t), t, w)`.

```
syms t w;
u=heaviside(t);
F=fourier(t^2*e^-3*t*p u)
```

Από την εκτέλεση προκύπτει

```
F=2/(w*i + 3)^3
```

β) Με τις εντολές

```
syms t w;
u=heaviside(t);
F=fourier(t^2*sin(2*t)*e^(-3*t)*u)
pretty(simple(F))
```

προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier στη συνήθη μορφή

$$\frac{i}{(wi+3+2i)^3}-\frac{i}{(wi+3-2i)^3}$$

γ) Με τις εντολές

```
syms a t w;
F=fourier(t^2*sin(2*t)*e^(-3*t)*u)
pretty(simple(F))
```

προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

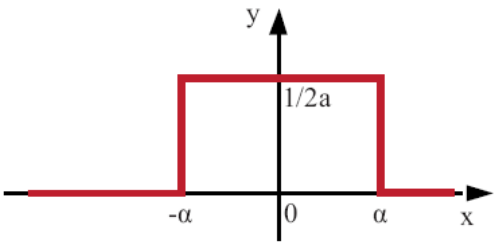
```
F=pi(heaviside(a+w)-heaviside(w-a))
```

δηλαδή

$$F(\omega)=\pi[u(\omega+a)-u(\omega-a)]=\begin{cases}\pi, & |t|<a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$$

Παράδειγμα 17.11

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού



Λύση

Ο παλμός αυτός περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |t|<a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$$

Εκφράζουμε αρχικά την $f(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό βηματικών συναρτήσεων

$$f(t)=u(t+a)-u(t-a)$$

οπότε με τις εντολές:

```
syms a,t w;
H=heaviside(t+a)-heaviside(t-a);
F=fourier((1/2*a))*H)
```

Από την εκτέλεση προκύπτει

```
Command Window
((cos(a*w)*i + sin(a*w))/w - (cos(a*w)*i - sin(a*w))/w)/(2*a)
```

Ο ορθογώνιος αυτός παλμός μπορεί να εισαχθεί πιο εύκολα με την εντολή

```
1/(2*a)*rectangularPulse(-a,a,t)
```

17.6 Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

Αν $F(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης, τότε

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Η σχέση αυτή λέγεται **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** της συνάρτησης $F(\omega)$ και γράφουμε

$$f(t)=F^{-1}\{F(\omega)\}.$$

Εντολή MATLAB	`ifourier(f(t), w, t)`

Εύρεση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης $f(t)$.

Παράδειγμα 17.12

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων:

α) $F(\omega)=\dfrac{1}{\omega^2}+3$ β) $F(\omega)=\dfrac{1}{i\omega}$ γ) $F(\omega)=\dfrac{1}{\omega^4+1}$ δ) $f(t)=\dfrac{1}{i\omega^2+1}$

Λύση

α) Αφού ορίσουμε ως `syms` τις μεταβλητές t,w, χρησιμοποιούμε την εντολή `fourier(f(t),t,w)]`

```
syms t w
f=ifourier(1/(w^2+3),w,t)
```

Από την εκτέλεση προκύπτει

```
Command Window
f=((3^(1/2)*pi*exp(-3^(1/2)*t)*heaviside(t))/3
+ (3^(1/2)* pi*heaviside(-t)*exp(3^(1/2)*t))/3)/(2*pi)
```

ή στη συνήθη μορφή με την εντολή `pretty(simple(f))`

$$\frac{1}{6}(3^{1/2}e^{-3^{\frac{1}{2}}t}heaviside(t))+\frac{1}{6}(3^{1/2}e^{3^{1/2}t}heaviside(-t))$$

Δηλαδή

$$f(t)=\sqrt{\frac{3}{6}}(e^{-\sqrt{3}t}u(t)+e^{\sqrt{3}t}u(-t))=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-\sqrt{3}|t|}$$

β) Με τις εντολές:

```
syms t w
f=ifourier(1/(i*w ),w,t)
```

προκύπτει `f=heaviside(t) - ½`

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & t>0\\ -\dfrac{1}{2}, & t<0\end{cases},$$

γ) Με τις εντολές:

```
syms t w;
f=ifourier(1/(w^ 4+1),w,t)
pretty(simple(F))
```

προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier

$$f=\frac{1}{2}[e^{-\frac{t2^{1/2}}{2}}\sin(\frac{t2^{1/2}}{2}+\frac{\pi}{4})heaviside(t)-heaviside(-t)e^{\frac{t2^{1/2}}{2}}\sin(\frac{t2^{1/2}}{2}-\frac{\pi}{4})]$$

δ) Με τις εντολές

```
syms t w;
f=ifourier(1/(i*w^2+1),w,t)
pretty(simple(F))
```

προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f=\frac{1}{2}\{(-i)^{1/2}e^{-(-i)^{1/2}t}[heaviside(t)+heaviside(-t)e^{2(-i)^{1/2}t}]\}$$

17.7 Μετασχηματισμός Z

Οι ακολουθίες x_n για τις οποίες

$$x_n=0,\quad \gamma\iota\alpha\ \ n<0$$

QR 17.3: Μετασχηματισμός Z

qr.tziola.gr/Ehxt1 pdf

λέγονται **αιτιατές** ακολουθίες. Με τέτοιες ακολουθίες ασχολούμαστε στο κεφάλαιο αυτό. Αντίστοιχα με το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace μίας τμηματικά συνεχούς συνάρτησης $x(t)$

$$L\{x(t)\}=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-st}dt,$$

ορίζεται και ο μετασχηματισμός $\mathbb{Z}$ μιας αιτιατής ακολουθίας x_n, δηλαδή μίας συνάρτησης της διακριτής μεταβλητής $n(n=0,1,2,\ldots)$.

Ως **μετασχηματισμό** $\mathbb{Z}$ μίας αιτιατής ακολουθίας x_n ορίζεται η δυναμοσειρά απείρων όρων:

$$X(z)=Z\{x_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{z^n},$$

όπου z μιγαδική μεταβλητή.

Εντολή MATLAB	`ztrans(`x_n`)`

Εύρεση του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας ακολουθίας.

Παράδειγμα 17.13

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας

$$x_n=(n+3)^3 2^{n+2}$$

Προγραμματισμός MATLAB

Αφού ορίσουμε ως `syms` τις μεταβλητές n, z χρησιμοποιούμε την εντολή `ztrans(`x_n`)`.

```
syms z n
iztrans((n+3)^3*2^(n+2))
```

Αποτέλεσμα MATLAB

```
Command Window
ans =
108*  z)/(z-2)+(216*z)/(z-2)^2+(8*z*(z^2+8*z  +  4))/(z-2)^4  +  (72*z*(z+2))/(z-
2)^3
```

Εκτελώντας στο τέλος την εντολή: `pretty(simple(ans))` προκύπτει η απάντηση συνήθη μορφή

$$\frac{4z(27z-88z^3+124z-64)}{(z-2)^4}$$

17.8 Αντίστροφος μετασχηματισμός Z

Ορίζουμε ως **αντίστροφο μετασχηματισμό** $\mathbb{Z}$ της μιγαδικής συνάρτησης $X(z)$ μία ακολουθία x_n (αν υπάρχει), τέτοια ώστε

$$Z\{x_n\} = X(z)$$

και γράφουμε

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x_n$$

Στη γενική περίπτωση δεν υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός Z μίας συνάρτησης.

Εντολή MATLAB	`iztrans(`x_n`)`

Εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 17.14

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ των συναρτήσεων:

α) $X(z) = \dfrac{z}{z^2} - 5z + 6$ β) $X(z) = \dfrac{1}{z^2} + 3z + 2$ γ) $X(z) = z^3 + z^2 + \dfrac{3}{z^3}$

Προγραμματισμός MATLAB

α) Αφού ορίσουμε ως `syms` τις μεταβλητές z, n χρησιμοποιούμε την εντολή `iztrans(X(z),n)`

```
syms z n
iztrans(z/(z^2-5z+6),n)
```

```
Command Window
ans =
3^n-2^n
```

β) Στην περίπτωση αυτή εκτελούμε τις εντολές

```
syms z n
iztrans(1/(z^2+3*z+2),n)
```

```
Command Window
ans =
 (-2)^ n/2-(-1)^n+kroneckerDelta(n,0)/2
```

δηλαδή,

$$x_n = \frac{1}{2}(-2)^n - (-1)^n + \frac{1}{2}\delta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-2)^0 - (-1)^0 + \frac{1}{2} = 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(-2)^n - (-1)^n, & n = 0 \end{cases}$$

γ) Στην περίπτωση αυτή εκτελούμε τις εντολές:

```
syms z n
iztrans((z^3+z^2+3)/z^3,n)
```

Αποτέλεσμα MATLAB

```
Command Window
ans =
kroneckerDelta(n-1,0)+3* kroneckerDelta(n-3,0)+kroneckerDelta(n,0)
```

Δηλαδή:

$$x_n = \delta_{n-1} + 3\delta_{n-3} + \delta_n = \{0,1,0,0\ldots\} + \{0,0,0,1,0,0\ldots\} + \{1,0,0\ldots\} = \{1,1,0,1,0,0\ldots\}.$$

Στη λύση αυτή καταλήγουμε αν γράψουμε την $X(z)$ στη μορφή

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{3}{z^3},$$

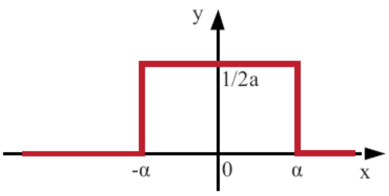
οπότε

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\{1\} + \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{z}\} + 3\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{1}{z^3}\} = \delta_n + \delta_{n-1} + 3\delta_{n-3}$$

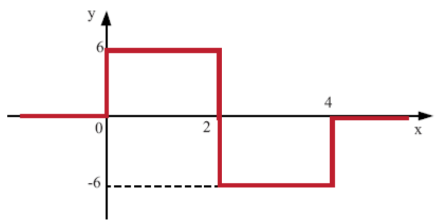
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 17.1

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των σημάτων των παρακάτω σχημάτων.



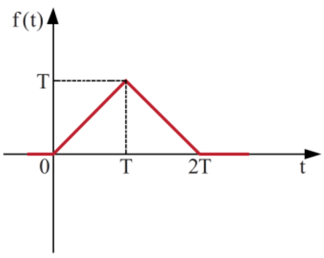
α)



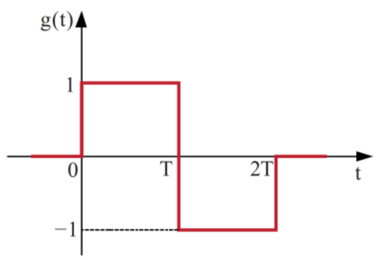
β)

Άσκηση 17.2

Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων $f(t)$ και $g(t)$ του παρακάτω σχήματος.



α)



β)