

26

Απόκριση γραμμικών συστημάτων στο πεδίο των συχνοτήτων

26.1 Απόκριση συχνότητας συστήματος πρώτης τάξης

Για τη μελέτη απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεύτερης τάξης οδηγούμε το σύστημα με ένα δυναμικό χρονικά μεταβαλλόμενο σήμα. Κατάλληλο μέγεθος αποτελεί μια ημιτονοειδής κυματομορφή

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad X(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος πρώτης τάξης δίνεται από την έκφραση

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \left(\frac{K}{\tau s + 1} \right) \left(A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Η έξοδος του συστήματος μέσω της μαθηματικής ανάπτυξης προκύπτει από τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace (L^{-1}) και είναι

$$y(t) = \underbrace{\frac{\omega K A}{1 + \omega^2 \tau^2} \tau e^{-t/\tau}}_{\text{Μεταβατική κατάσταση}} + \underbrace{\frac{K A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega \tau + \varphi)}_{\text{Μόμνη κατάσταση}}$$

Μετά από χρόνο $t = \infty$ η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή

$$y(t) = \left(\frac{K A}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \left(\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \sin(\omega \tau + \varphi) \right) = \left(\frac{K A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right) \sin(\omega \tau + \varphi)$$

Ο συντελεστής $M = \frac{K A}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$ προσδιορίζει το πλάτος του σήματος εξόδου.

Ο συντελεστής διαφοράς φάσης συναρτήσει της συχνότητας του σήματος εισόδου δίνεται

$$\varphi = \tan^{-1}(-\omega \tau)$$

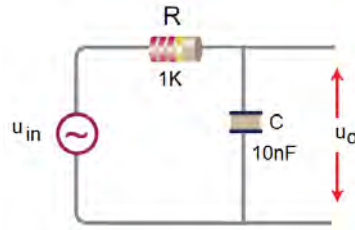
Εντολή
MATLAB

bode (sys)

Παράγει τα γραφήματα bode

Παράδειγμα 26.1

Για το παρακάτω κύκλωμα (σύστημα) να παράγετε το διάγραμμα Bode.

**Λύση**

Η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος είναι $G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$

Προγραμματισμός MATLAB

```
clear all
clc
R=1000
C=10e-9
```

Δημιουργία συνάρτησης

```
s = tf('s');
G = 1/(R*C*s+1)
```

Δημιουργία Bode

```
bode(G)
grid on
```

[magn, phase]=bode(G)

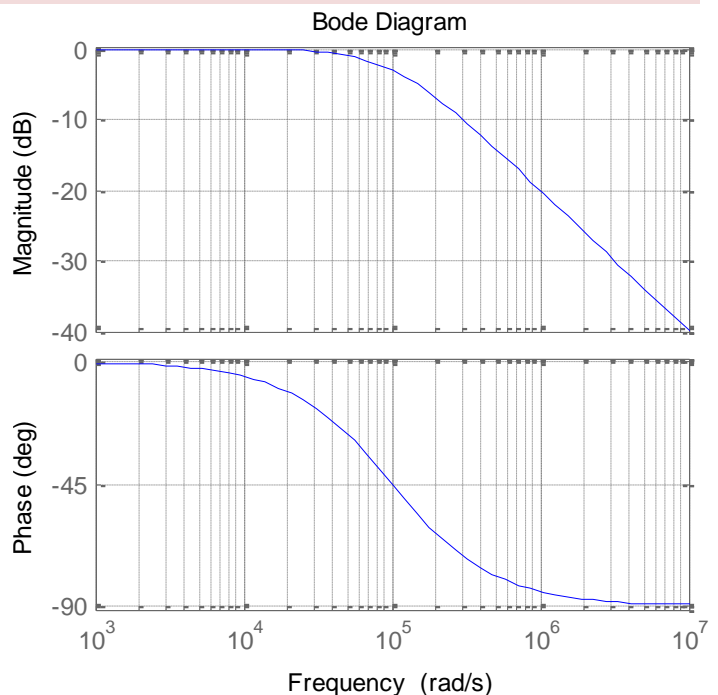
Εξαγωγή τιμών του 23^{ου} στοιχείου των διανυσμάτων magn και phase

```
magn(23)
phase(23)
```

Αποτελέσματα MATLAB

```
Command Window
G =
      1
-----
1e-05 s + 1

ans =
    0.7071
ans =
   -45
```

**26.2 Απόκριση συχνότητας συστήματος δεύτερης τάξης**

Η μαθηματική έκφραση τους σήματος εξόδου αποτελεί το λόγο πλάτους εξόδου προς πλάτος εισόδου και δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$$

Παράδειγμα 26.2

Για το παρακάτω σύστημα να παράγετε το διάγραμμα του μέτρου και της φάσης κατά Bode.

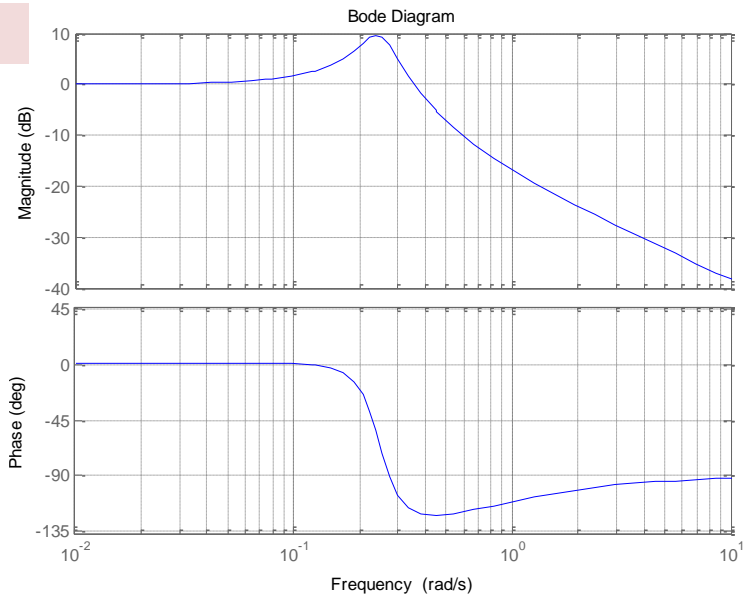
$$G(s) = \frac{2s + 1}{16,5s^2 + 1,5s + 1}$$

Προγραμματισμός MATLAB

```
clear all
clc
s = tf('s');
G = (2*s+1)/(16.5*s^2+1.5*s+1)
```

```
bode(G)
grid on
```

Αποτέλεσμα MATLAB



Παράδειγμα 26.3

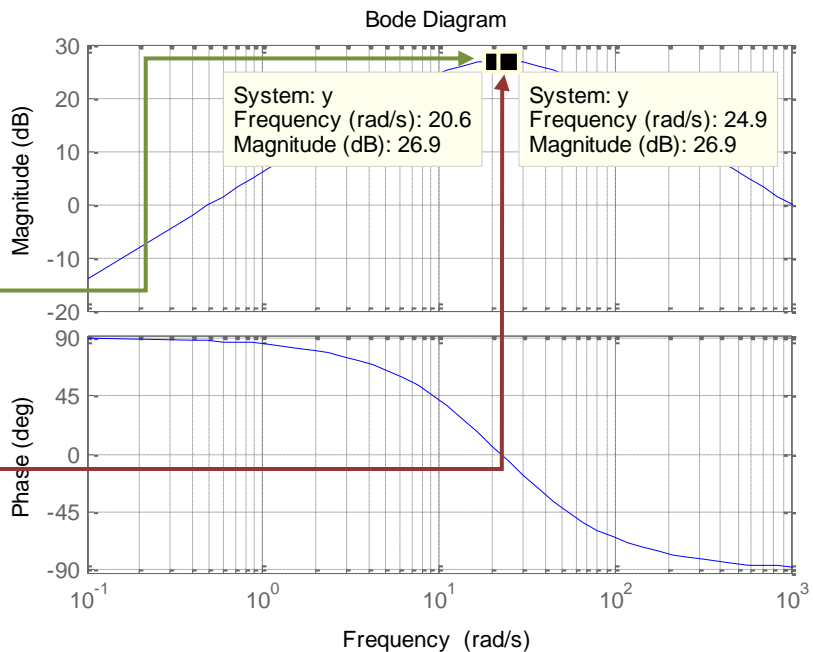
Να παράγετε το διάγραμμα του μέτρου και της φάσης κατά Bode για το παρακάτω σύστημα και να εμφανίσετε τα σημεία καμψής στην καμπύλη του κέρδους.

$$y(s) = \frac{1000s}{s^2 + 45s + 500}$$

Προγραμματισμός MATLAB

```
s=tf('s')
y=(1000*s)/(s^2+45*s+500)
bode(y)
grid on
```

Αποτέλεσμα MATLAB



Με δεξί κλικ επάνω στην καμπύλη μπορούμε να μετακινούμε το πλαίσιο πληροφοριών

Εντολή MATLAB	<code>margin(sys)</code>
--------------------------	--------------------------

Με την εντολή `margin` το MATLAB εμφανίζει σε διάγραμμα Bode τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης.

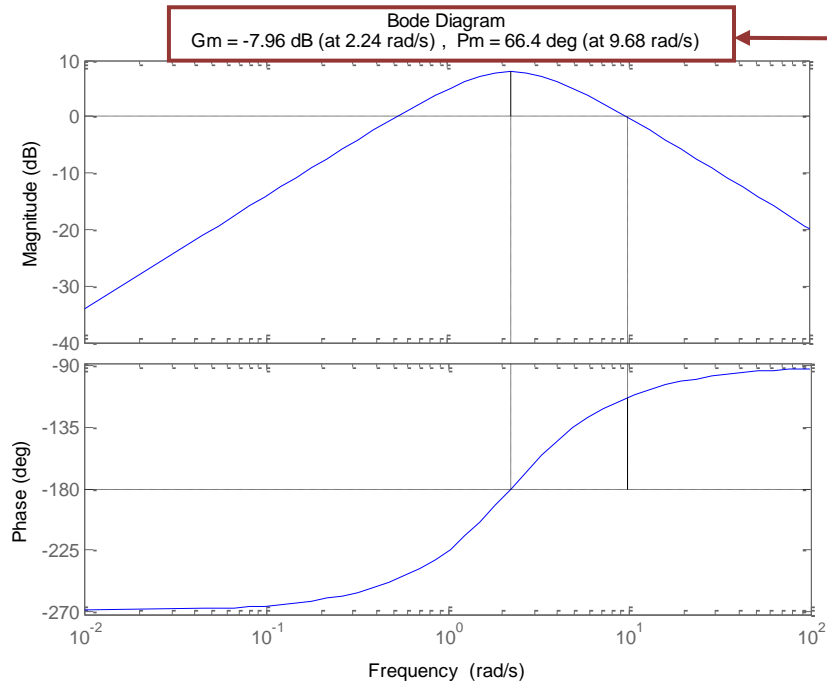
Παράδειγμα 26.4

Να παράγετε το διάγραμμα του μέτρου και της φάσης κατά Bode και να βρεθούν τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης.

$$G(s) = \frac{10s}{s^2 + 4s + 5}$$

Προγραμματισμός MATLAB

```
s=tf('s')
G=(10*s)/(s^2-4*s+5)
margin(G)
```



Αποτέλεσμα MATLAB

Εντολή MATLAB	<code>[Gm, Pm, Wgm, Wpm] = margin(sys)</code>
--------------------------	-----------------------------------------------

Υπολογίζει α) τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης και β) τις συχνότητες τους.

Παράδειγμα 26.5

Να βρεθούν τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης καθώς και οι συχνότητές τους

$$G(s) = \frac{10s}{s^2 - 4s + 5}$$

Προγραμματισμός MATLAB

```
s=tf('s')
G=(10*s)/(s^2-4*s+5)

[Gm, Pm, Wgm, Wpm] = margin(G)
```

Αποτέλεσμα MATLAB

