Γραμμικό σύστημα συνεχούς χρόνου είναι κάθε φυσικό (ή νοητό) σύστημα (π.χ. ένα κύκλωμα ή ένας ταλαντωτής) το οποίο για κάθε είσοδο $v(t)$ παράγει μία έξοδο $x(t)$ και μοντελοποιείται με μία γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς τη συνάρτηση $x(t)$.

Τέτοια συστήματα περιγράφονται από τη συνάρτηση μεταφοράς την οποία ορίζουμε στην επόμενη υποενότητα.

8.8.1 Συνάρτηση μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος είναι μία πολύ χρήσιμη έννοια για την περιγραφή του, αφού περιέχει όλες τις πληροφορίες για το σύστημα, όπως την ευστάθεια και την απόκριση του σε οποιαδήποτε είσοδο (βλ. Παρατήρηση 8.8)

Ορισμός 8.4 *Η **συνάρτηση μεταφοράς** ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου, συστήματος συνεχούς χρόνου ορίζεται ως ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace $X(s)$ της συνάρτησης εξόδου $x(t)$ προς το μετασχηματισμό Laplace $V(s)$ της συνάρτησης εισόδου $v(t)$ υπό την προυπόθεση ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές.*

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)}.$$

Οι συναρτήσεις μεταφοράς χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό της σχέσης εισόδου-εξόδου χρονικά ανεξάρτητων συστημάτων συνεχούς χρόνου και παίζουν σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό τους.

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \beta_m v^{(m)}(t) + \beta_{m-1}v^{(m-1)}(t) + \cdots + \beta_1 v'(t) + \beta_0,$$

όπου $n \geq m$, a_i και β_i σταθερές, $x(t)$ η έξοδος (**απόκριση του συστήματος**) και $v(t)$ η εφαρμοζόμενη **είσοδος** τη χρονική στιγμή t.

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της διαφορικής αυτής εξίσωσης, με την προυπόθεση ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, με τη βοήθεια της Πρότασης 8.3 προκύπτει

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) X(s) = \left(\beta_m s^m(t) + \beta_{m-1}v^{m-1} + \beta_1 s + \beta_0\right) V(s),$$

όπου $X(s)$ και $V(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων εξόδου $x(t)$ και ειδόδου $v(t)$ αντίστοιχα, οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, η **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{\beta_m s^m(t) + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \tag{8.18}$$

Ο περιορισμός $n \geq m$ τίθεται, διότι αλλιώς ($m > n$) η έξοδος (απόκριση του συστήματος) για ρεαλιστικές εισόδους απειρίζεται, κάτι το οποίο δεν έχει φυσική σημασία.

Ορισμός 8.5 *Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου, συστήματος συνεχούς χρόνου ως*

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

τότε:

- *Η εξίσωση* $Q(s) = 0$

*λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος.*

- *Ο βαθμός της εξίσωσης αυτής λέγεται **τάξη** του συστήματος.*
- *Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης λέγονται **πόλοι** της συνάρτησης μεταφοράς.*
- *Οι ρίζες της εξίσωσης* $P(s) = 0$

*λέγονται **μηδενικά** (zeros) της συνάρτησης μεταφοράς.*

Βάζοντας τους πόλους και τις μηδενικές τιμές της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος στο μιγαδικό επίπεδο προκύπτει το **διάγραμμα πόλων-μηδενικών**, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στην ανάλυση και μελέτη του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς χαρακτηρίζει ένα γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο, σύστημα και είναι ανεξάρτητη από την είσοδό του. Παρότι χαρακτηρίζει τη δυναμική ενός συστήματος δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη φυσική δομή του, αφού συστήματα τελείως διαφορετικής φύσης έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς.

Για παράδειγμα το κύκλωμα RLC του Παραδείγματος 8.59 και το σώμα που ταλαντώνεται του Παραδείγματος 8.58 έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Στο κύκλωμα RLC του Παραδείγματος 8.59 $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του φορτίου του πυκνωτή $q(t)$ και $V(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της τάσης της πηγής, a_2 είναι η αυτεπαγωγή του πηνίου, a_1 η αντίσταση του αντιστάτη και $a_0 = \frac{1}{C}$, όπου C η χωρητικότητα του πυκνωτή, ενώ στο σύστημα σώματος-ελατηρίου του Παραδείγματος 8.58, $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απομάκρυνσης του σώματος $x(t)$ και $V(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της διεγείρουσας δύναμης $f(t)$, a_2 η μάζα του σώματος, a_1 ο συντελεστής απόσβεσης και a_0 η σταθερά του ελατηρίου.

Παρατήρηση 8.8 *Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ ενός συστήματος, τότε μπορούμε να βρούμε την απόκριση του $x(t)$ για δεδομένη είσοδο $v(t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες ως εξής:*

- *Βρίσκουμε το μετασχηματισμό Laplace $V(s)$ της $v(t)$.*
- *Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ της $x(t)$ είναι*

$$X(s) = G(s)V(s).$$

- *Βρίσκοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $G(s)$ προκύπτει η απόκριση του συστήματος*

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

την οποία βρίσκουμε, συνήθως, αναλύοντας την $G(s)$ σε μερικά κλάσματα (βλ. Παραδείγματα 8.58-60).

8.8.2 Γραμμικά σύστηματα πρώτης τάξης

Στην υποενότητα αυτή περιγράφουμε γραμμικά συστήματα πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$ax'(t) + \beta x(t) = \gamma v(t), \qquad (i)$$

όπου $v(t)$ και $x(t)$ η είσοδος και έξοδος του συστήματος και a, β, γ σταθερές.

Τέτοια συστήματα συναντούμε σε πάρα πολλούς τομείς εφαρμογών, όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα (βλ. Παραδείγματα 8.56,57,59,60) και οι χημικές διεργασίες (βλ. Ενότητα 8.8.6).

Η (i) γράφεται στη μορφή

$$\frac{a}{\beta}x'(t) + x(t) = \frac{\gamma}{\beta}v(t)$$

ή

$$\tau x'(t) + x(t) = kv(t) \qquad (ii)$$

όπου

$$\tau = \frac{a}{\beta} \quad \text{και} \quad k = \frac{\gamma}{\beta}$$

σταθερές, που λέγονται **χρονική σταθερά** και **απολαβή μόνιμης κατάστασης** αντίστοιχα (τα ονόματα των παραμέτρων αυτών αιτιολογούνται στην Πρόταση 8.25).

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της (ii) προκύπτει

$$\tau s X(s) + X(s) = kV(s)$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}.$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.8, η απόκριση του συστήματος αυτού σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $X(s) = G(s)U(s)$, όπου $U(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης εισόδου $u(t)$, οπότε (βλ. Πίνακα 8.1)

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\tau s+1}\frac{1}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{\tau}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right\} = \frac{k}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right\} \end{aligned} \qquad (i)$$

Αναλύουμε τη ρητή αυτή συνάρτηση σε μερικά κλάσματα για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{\tau}},$$

όπου (βλ. Παράδειγμα 8.35β)

$$\begin{aligned} A &= s\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{0+\frac{1}{\tau}} = \tau \\ B &= \left(s+\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\Bigg|_{s=-\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{s}\Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = -\tau, \end{aligned}$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 8.15 και τον Πίνακα 8.2,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k}{\tau}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s+\frac{1}{\tau}}\right\} = \frac{k}{\tau}\left(\tau\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \tau\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right\}\right) \\ &= \frac{k}{\tau}\left[\tau u(t) - \tau e^{\frac{t}{\tau}}u(t)\right] = k\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right)u(t) \end{aligned}$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι:

Πρόταση 8.25 *Ένα γραμμικό σύστημα α΄ τάξης, που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση*

$$\tau x'(t) + x(t) = kv(t),$$

έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}u(t)$$

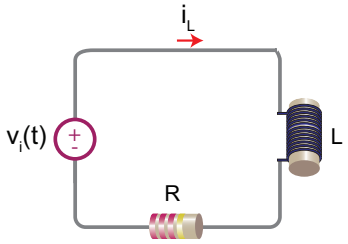
και η απόκριση του σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι

$$x(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι:

- *Η τελική απόκριση του συστήματος (μετά από αρκετό χρόνο) είναι k.*
- *Η χρονική σταθερά του συστήματος είναι τ.*

Παράδειγμα 8.58 *α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος του Σχήματος 8.21, που περιέχει πηνίο αυτεπαγωγής L και αντίσταση R.*
β) Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t για μοναδιαία βηματική είσοδο $u(t)$.



Σχήμα 8.21 *Κύκλωμα πηνίου-αντίστασης (κύκλωμα RL)*

Λύση

α) Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, προκύπτει

$$Ri(t) + Li'(t) = v_i(t),$$

ή

$$\frac{L}{R}i' + i = \frac{v_i(t)}{R}.$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, το κύκλωμα αυτό, με έξοδο την ένταση του ρεύματος, είναι γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς ($\tau = \frac{L}{R}$ και $k = \frac{1}{R}$)

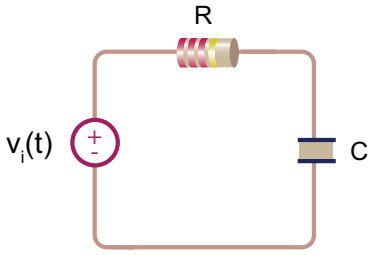
$$G(s) = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{L}{R}s + 1} = \frac{1}{R + Ls}$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, η απόκριση του κυκλώματος σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $v_i(t) = u(t)$ (δηλαδή, η ένταση του ρεύματος $i(t)$) είναι

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t).$$

Παράδειγμα 8.59 *α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος του Σχήματος 8.22, που περιέχει πυκνωτή χωρητικότητας C και αντίσταση R.*
β) Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, να βρεθεί το φορτίο του τη χρονική στιγμή t για βηματική συνάρτηση εισόδου

$$v_i(t) = Eu(t).$$



Σχήμα 8.22 *Φόρτιση πυκνωτή (κύκλωμα RC)*

Λύση

Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff προκύπτει

$$v_C(t) + Ri(t) = v_i(t) \Leftrightarrow \frac{q}{C} + Rq'(t) = v_i(t)$$

ή ($i(t) = q'(t)$ και $v_C(t) = \frac{q(t)}{C}$)

$$RCq'(t) + q(t) = Cv_i(t), \qquad (i)$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, το κύκλωμα αυτό με έξοδο το φορτίο του πυκνωτή είναι γραμμικό σύστημα πρώτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς ($\tau = RC$ και $k = C$)

$$G(s) = \frac{C}{RCs+1}u(t)$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, η απόκριση του κυκλώματος σε βηματική είσοδο $v_i(t) = Eu(t)$ (το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t) είναι

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

8.8.3 Γραμμικά σύστηματα δεύτερης τάξης

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε γραμμικά σύστηματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή σύστηματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$a_2x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = v(t), \qquad (i)$$

όπου $v(t)$ και $x(t)$ η είσοδος και έξοδος του συστήματος και a_0, a_1, a_2 σταθερές.
Τέτοια συστήματα συναντούμε σε πάρα πολλούς τομείς εφαρμογών, όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα (βλ. Παραδείγματα 8.58-59) και οι χημικές διεργασίες (βλ. Ενότητα 8.8.6).

Η (i) γράφεται στη μορφή

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = \frac{v(t)}{a_2} \qquad (ii)$$

όπου $\gamma = \dfrac{a_1}{2a_2}$ και $\omega^2 = \dfrac{a_0}{a_2}$ σταθερές

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της (ii), λόγω των Προτάσεων 8.1, 8.2 και 8.3, προκύπτει

$$s^2X(s) + 2\gamma sX(s) + \omega^2X(s) = \frac{V(s)}{a_2} \Leftrightarrow \left(s^2 + 2\gamma s + \omega^2\right)X(s) = \frac{V(s)}{a_2}$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{a_2(s^2 + 2\gamma s + \omega^2)}.$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.8, η απόκριση του συστήματος αυτού σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = G(s)U(s),$$

όπου $U(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης εισόδου $u(t)$.
Η εύρεση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace της $X(s)$ εξαρτάται από το αν ο παρονομαστής έχει δύο πραγματικές, μία διπλή ή δύο μιγαδικές ρίζες, δηλαδή από το πρόσημο της διακρίνουσας

$$\Delta = (2\gamma)^2 - 4\omega^2.$$

Έτσι, αναλύοντας τον $G(s)$ σε μερικά κλάσματα και με τη βοήθεια της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2, προκύπτει:

- Αν $\gamma > \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τις δύο πραγματικές ρίζες

$$\rho_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a_2(s+\rho_1)(s+\rho_2)}\right\} = \frac{1}{a_2}\left(\tau\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\rho_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+\rho_1}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{a_2}\left(Ae^{-\rho_1 t} + Be^{-\rho_1 t}\right)u(t), \qquad A, B \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

- Αν $\gamma = \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τη διπλή ρίζα $\rho = -\gamma$, οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a_2(s+\rho_1)(s+\rho_2)}\right\} = \frac{1}{a_2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\rho}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{(s+\rho)^2}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{a_2}\left(Ae^{-\rho t} + Bte^{-\rho t}\right)u(t), \qquad A, B \text{ σταθερές.} \end{aligned}$$

- Αν $\gamma < \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες