Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί & Μιγαδικές Συναρτήσεις

συνδεδεμένο περιεχόμενο

QR biblio

Νίκος Μυλωνάς • **Χρήστος Σχοινάς**

Μαθηματικός - Φυσικός, Α.Π.Θ. **Καθηγητής Δ.Π.Θ.**

ΤΖΙΟΛΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

13.1 Βασικές έννοιες

Οι ακολουθίες x_n για τις οποίες

$$x_n = 0, \quad \text{για } n < 0$$

λέγονται **αιτιατές** ακολουθίες. Με τέτοιες ακολουθίες ασχολούμαστε στο κεφάλαιο αυτό.

Αντίστοιχα με το μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace μίας τμηματικά συνεχούς συνάρτησης $x(t)$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt,$$

ορίζεται και ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μίας αιτιατής ακολουθίας x_n, δηλαδή μίας συνάρτησης της διακριτής μεταβλητής n ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Ορισμός 13.1 *Ως μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ μίας αιτιατής ακολουθίας x_n ορίζεται η δυναμοσειρά απείρων όρων*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n},$$

όπου z μιγαδική μεταβλητή.

Η σχέση ανάμεσα σε μία ακολουθία x_n και στο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ αυτής συμβολίζεται και ως

$$x_n \leftrightarrows X(z).$$

Ορισμός 13.2 ***Περιοχή σύγκλισης*** *του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μίας ακολουθίας λέμε το σύνολο των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία η δυναμοσειρά που εμφανίζεται στον ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$, συγκλίνει σε κάποια πεπερασμένη τιμή.*

Συνήθως η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μίας ακολουθίας είναι ένας δακτύλιος του μιγαδικού επιπέδου.

Παράδειγμα 13.1 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της βηματικής ακολουθίας*

$$u_n = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \{1, 1, \dots\}$$

δηλαδή της αιτιατής σταθερής ακολουθίας $u_n = \mathbf{1}$ είναι

$$\mathcal{Z}\{u_n\} = \mathcal{Z}\{\mathbf{1}\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Λύση

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ και της βηματικής ακολουθίας προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ αυτής είναι

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z^n} u(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad (i)$$

Σύμφωνα με την (4.7), η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει στη συνάρτηση (βλ. Ενότητα 4.1.1)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

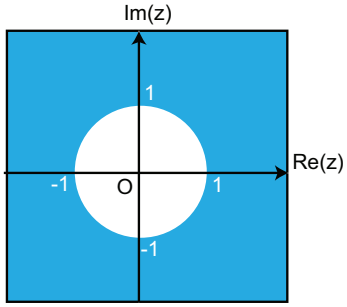
για εκείνα τα z για τα οποία $\left|\frac{1}{z}\right| < 1,$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 13.2, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας αυτής είναι οι μιγαδικοί z για τους οποίους

$$|z| > 1,$$

δηλαδή το εξωτερικό του κύκλου του μιγαδικού επιπέδου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 (βλ. Σχήμα 13.1). Επομένως,

$$\mathcal{Z}\{u_n\} = \mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$



Σχήμα 13.1 *Η περιοχή σύγκλισης στο μιγαδικό επίπεδο του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της βηματικής ακολουθίας u_n.*

Παράδειγμα 13.2 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$:*
α) της ***κρουστικής ακολουθίας***

$$\delta_n = \{1, 0, 0, \dots\}$$

είναι

$$\Delta(z) = \mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1.$$

β) της ***μετατοπισμένης κρουστικής ακολουθίας***

$$\delta_{n-k} = \{0, \dots, 1, 0, 0, \dots\}$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{\delta_{n-k}\} = \frac{1}{z^k}.$$

Λύση

α) Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$\Delta(z) = \mathcal{Z}\{\delta_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n}{z^n} = \frac{1}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \cdots = \frac{1}{z},$$

αφού $\delta_n = 0$, για $n = 1, 2, \dots$, οπότε όλοι οι άλλοι όροι του αθροίσματος είναι μηδέν.
β) Από τον ορισμό της ακολουθίας δ_{n-k} και τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$\Delta(z) = \mathcal{Z}\{\delta_{n-k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{n-k}}{z^n} = \frac{0}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \cdots + \frac{1}{z^k} + \frac{0}{z^{k+1}} \cdots = \frac{1}{z^k}.$$

Παράδειγμα 13.3 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = a^n u_n = a^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad a \in R,$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a.$$

Λύση

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας αυτής είναι

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \qquad (i)$$

Σύμφωνα με την (4.7) η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει στη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

για εκείνα τα z για τα οποία

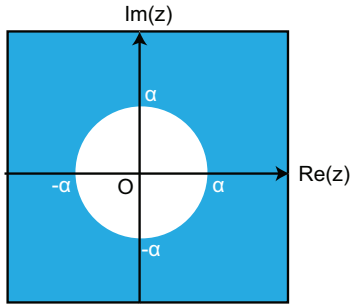
$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|,$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 13.2, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας αυτής είναι οι μιγαδικοί z για τους οποίους

$$|z| > |a|,$$

δηλαδή το εξωτερικό του κύκλου του μιγαδικού επιπέδου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $|a|$ (βλ. Σχήμα 13.2). Επομένως,

$$\mathcal{Z}\{a^n u_n\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|.$$



Σχήμα 13.2 *Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z της ακολουθίας* $x_n = a^n$.

Παράδειγμα 13.4 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = e^{wn}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad w \in C, \ w \neq 0,$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{e^{wn}\} = \frac{z}{z-e^w}, \quad |z| > |e^w|.$$

Λύση

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$X(z) = \mathcal{Z}\{e^{wn}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^w)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^w}{z}\right)^n \qquad (i)$$

Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει στη συνάρτηση

$$X(z) = \frac{1}{1-\dfrac{e^w}{z}} = \frac{z}{z-e^w}$$

για εκείνα τα z για τα οποία

$$\left|\frac{e^w}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |e^w| < |z|,$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 13.2, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z της ακολουθίας αυτής είναι οι μιγαδικοί z για τους οποίους

$$|z| > |e^w|,$$

δηλαδή το εξωτερικό του κύκλου του μιγαδικού επιπέδου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $|e^w|$ (βλ. Σχήμα 13.2 για $a = e^w$). Επομένως,

$$\mathcal{Z}\{e^{wn}\} = \frac{z}{z-e^w}, \quad |z| > |e^w|.$$

Παράδειγμα 13.5 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n u_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

όπου $u_{n-2} = \{0, 0, 1, 1, \ldots\}$ μετατοπισμένη βηματική ακολουθία, και η περιοχή σύγλισής του.

Λύση

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$X(z) = \frac{0}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n \qquad (i)$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος αυτού αλλάζουμε το δείκτη άθροισης από n σε $m = n - 2$, οπότε

$$n = m + 2 \text{ και για } n = 2, \text{ θα είναι } m = 0.$$

Έτσι, η (i) δίνει

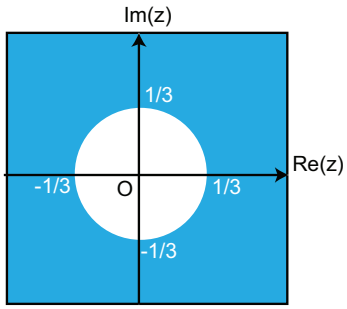
$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^{m+2} = \left(\frac{1}{3z}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^m = \left(\frac{1}{3z}\right)^2 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{3z}} = \frac{1}{3z(3z-1)}.$$

Σύμφωνα με την (4.7), η ακολουθία αυτή συγκλίνει για

$$\left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{3},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 13.2, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας αυτής είναι ο δακτύλιος του μιγαδικού επιπέδου (βλ. Σχήμα 13.3)

$$|z| > \frac{1}{3}.$$



Σχήμα 13.3 *Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας του Παραδ. 13.5*

Παρατήρηση 13.1 *Παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ μίας ακολουθίας ως προς μία παράμετρο προκύπτει ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μίας άλλης ακολουθίας.*

Παράδειγμα 13.6 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$$

Λύση

Παραγωγίζοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a$$

του Παραδείγματος 13.3 προκύπτει

$$\frac{d}{da}\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{d}{da}\left(\frac{z}{z-a}\right) \Leftrightarrow \mathcal{Z}\left\{\frac{d}{da}(a^n)\right\} = \frac{z}{(z-a)^2} \Leftrightarrow \mathcal{Z}\left\{na^{n-1}\right\} = \frac{z}{(z-a)^2},$$

οπότε για $a = 1$

$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$$

■

Ο επόμενος Πίνακας περιέχει τους μετασχηματισμούς $\mathcal{Z}$ ορισμένων βασικών αιτιατών ακολουθιών a_n μαζί με την περιοχή σύγλισης τους (πολλοί από αυτούς αποδεικνύονται σε παραδείγματα).

Πίνακας 13.1 Μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$ βασικών ακολουθιών.

Ακολουθία ($n > 0$)	**Μετασχηματισμός** $\mathcal{Z}$	**Περιοχή σύγλισης**
$1 = u_n = \{1, 1, 1 \dots\}$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\delta_n = \{1, 0, 0 \dots\}$	1	$\lvert z\rvert > 0$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
e^{wn}	$\dfrac{z}{z-e^w}$	$\lvert z\rvert > e^w$
n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos n\omega$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin n\omega$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \cos n\omega$	$\dfrac{z(z-a\cos\omega)}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \sin n\omega$	$\dfrac{za\sin\omega}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sinh(an)$	$\dfrac{z\sinh a}{z^2-2z\cosh a+1}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
$\cosh(an)$	$\dfrac{z(z-\cosh a)}{z^2-2z\cosh a+1}$	$\lvert z\rvert > \lvert e^a\rvert$
$\delta_{n-k} = \{0, 0, \dots 1, 0, 0, \dots\}$	$\dfrac{1}{z^k}$	$\lvert z\rvert > 0$
$u_{n-1} = \{0, 1, 1, \dots\}$	$\dfrac{1}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u_{n-k} = \{0, 0, \dots 1, 1, \dots\}$	$\dfrac{1}{z^{k-1}(z-1)}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^{n-1}u_{n-1}$	$\dfrac{1}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^{n-k}u_{n-k}$	$\dfrac{1}{z^{k-1}(z-a)}$	$\lvert z\rvert > 1$
$na^n u_n$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$

13.1.1 Εύρεση μετασχηματισμού Z με το Matlab

Η εύρεση του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ μίας ακολουθίας x_n με το Matlab γίνεται με την εντολή `ztrans(x_n)` όπως στο επόμενο παράδειγμα

Παράδειγμα 13.7 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = (n+3)^3 2^{n+2}$$

Λύση

Αφού ορίσουμε τις syms μεταβλητές n, z χρησιμοποιούμε την εντολή `ztrans(x_n)`

```
syms z n
iztrans((n+3)^3*2^(n+2))
```

Από την εκτέλεση προκύπτει

```
(108*z)/(z-2)+(216*z)/(z-2)^2+(8*z*(z^2+8*z + 4))/(z-2)^4 +
(72*z*(z+2))/(z-2)^3
```

Εκτελώντας στο τέλος την εντολή

```
pretty(simple(ans))
```

προκύπτει η απάντηση στην πιο βολική μορφή

$$\frac{4z(27z - 88z^3 + 124z - 64)}{(z-2)^4}$$

13.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Z

Στην ενότητα αυτή δίνουμε χωρίς απόδειξη κάποιες προτάσεις, με τη βοήθεια των οποίων η εύρεση του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ γίνεται πολύ πιο εύκολη σε πολλές περιπτώσεις.

Η πρώτη ιδιότητα περιγράφει τη **γραμμικότητα** του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$.

Πρόταση 13.1 *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ενός γραμμικού συνδυασμού ακολουθιών είναι ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ αυτών, δηλαδή*

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \alpha\mathcal{Z}\{x_n\} + \beta\mathcal{Z}\{y_n\}, \quad a, \beta \in C \text{ σταθερές.}$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_n + \beta y_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ax_n + \beta y_n}{z^n} = a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n} + \beta\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \alpha\mathcal{Z}\{x_n\} + \beta\mathcal{Z}\{y_n\}.$$

Παράδειγμα 13.8 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ των ακολουθιών*

α) $x_n = \sinh na$ *β)* $x_n = \cosh na, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

Λύση

α) Σύμφωνα με τον Ορισμό του sinh, την Πρόταση 13.1 (γραμμικότητα του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$) και το Παράδειγμα 13.4,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\sinh na\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{na} - e^{-na}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{na}\} - \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-na}\} = \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^a} - \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-a}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{z(z - e^{-a}) - z(z - e^a)}{(z - e^a)(z - e^{-a})} = \frac{1}{2}\frac{z(e^a - e^{-a})}{(z - e^a)(z - e^{-a})} = \frac{1}{2}\frac{z2\sinh a}{z^2 - 2z\left(e^{-a} + e^{-a}\right) + 1} \\
&= \frac{z\sinh a}{z^2 - 2z\cosh a + 1}, \qquad |z| > |e^a|.
\end{aligned}$$

β) Όμοια

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\cosh na\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{na}+e^{-na}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{na}\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\{e^{-na}\} = \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{a}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-a}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{z(z-e^{-a})+z(z-e^{a})}{(z-e^{a})(z-e^{-a})} = \frac{1}{2}\frac{z(2z-e^{a}-e^{-a})}{(z-e^{a})(z-e^{-a})} = \frac{1}{2}\frac{2z(z-\cosh a)}{z^2-2z\,(e^{a}+e^{-a})+1} \\ &= \frac{z(z-\cosh a)}{z^2-2z\cosh a+1}, \qquad |z|>|e^{a}|.\end{aligned}$$

■

Η επόμενη ιδιότητα δίνει το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας που προκύπτει από την **προς τα πίσω μετατόπιση** μίας ακολουθίας.

Πρόταση 13.2 *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$y_n = x_{n-n_0}u_{n-n_0}, \quad n = n_0, n_0+1, \ldots, \quad n_0 \in N \text{ σταθερά},$$

όπου x_n μία αιτιατή ακολουθία, είναι

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n-n_0}\} = \frac{1}{z^{n_0}}\mathcal{Z}\{x_n\}.$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_{n-n_0}}{z^n}, \tag{i}$$

οπότε, αλλάζοντας το δείκτη άθροισης από n σε $k = n - n_0$, η (i) δίνει

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \sum_{k=-n_0}^{\infty}\frac{x_k}{z^{k+n_0}} = \frac{1}{z^{n_0}}\sum_{k=-n_0}^{\infty}\frac{x_k}{z^k}, \tag{ii}$$

Επειδή η x_n είναι αιτιατή ακολουθία, $\qquad x_k = 0, \quad \text{για} \quad k < 0,$

οπότε η (ii) γίνεται $\qquad \mathcal{Z}\{y_n\} = \dfrac{1}{z^{n_0}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{z^k} = \frac{1}{z^{n_0}}\mathcal{Z}\{x_n\}.$

■

Από τις Προτάσεις 13.1, 13.2 και τον Πίνακα 13.1 προκύπτει οτι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας

$$x_n = a^{n-k}u_{n-k} = a^{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots$$

είναι $\qquad \mathcal{Z}\{a^{n-k}u_{n-k}\} = \frac{1}{z^k}\mathcal{Z}\{a^n u_n\} = \frac{1}{z^k}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z^{k-1}(z-a)}, \quad n = k, k+1, \ldots.$

Επομένως, δείξαμε ότι

$$\mathcal{Z}\{a^{n-k}u_{n-k}\} = \frac{1}{z^{k-1}(z-a)}. \tag{13.1}$$

Για $k = 1$ από τη σχέση αυτή προκύπτει η πολύ χρήσιμη στη συνέχεια σχέση

$$\mathcal{Z}\{a^{n-1}u_{n-1}\} = \frac{1}{z-a}. \tag{13.2}$$

Παράδειγμα 13.9 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = 2^n u_{n-3} = 2^n, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{i}$$

είναι $\qquad \mathcal{Z}\{2^n u_{n-3}\} = \dfrac{8}{z^2(z-2)}, \quad |z| > 2.$

Λύση

Η (i) γράφεται

$$x_n = 8 \cdot 2^{n-3} u_{n-3} = 8 y_{n-3}, \quad \text{όπου} \quad y_n = 2^n u_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

οπότε, σύμφωνα με τις Προτάσεις 13.1, 13.2 και τον Πίνακα 13.1,

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{8y_n\} = 8\mathcal{Z}\{y_{n-3}\} = 8\,\frac{1}{z^3}\,\mathcal{Z}\{y_n\} = 8\,\frac{1}{z^3}\,\frac{z}{z-2} = \frac{8}{z^2(z-2)}, \quad |z| > 2.$$

■

Όμοια με το Παράδειγμα 13.8 αποδεικνύεται ότι:

Παρατήρηση 13.2 *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$x_n = a^n u_{n-k} = a^n, \quad n = k, k+1, \ldots$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{a^n u_{n-k}\} = \frac{a^k}{z^{k-1}(z-a)}, \quad |z| > a.$$

Παράδειγμα 13.10 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$y_n = \sin(n-2)\omega, \quad n = 2, 3, \ldots. \qquad (i)$$

Λύση

Η (i) γράφεται $\qquad y_n = x_{n-2}, \quad$ όπου $x_n = \sin n\omega, \quad n > 0$,

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 13.2 και τον Πίνακα 13.1,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n-2}\} = \frac{1}{z^2}\mathcal{Z}\{x_n\} = \frac{1}{z^2}\mathcal{Z}\{\sin n\omega\} = \frac{1}{z^2}\,\frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{\sin\omega}{z(z^2 - 2z\cos\omega + 1)}.$$

■

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας που προκύπτει από την **προς τα μπρος μετατόπιση** μίας ακολουθίας.

Η επόμενη πρόταση δίνει το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας που προκύπτει από την προς τα μπρος μετατόπιση μίας ακολουθίας **κατά ένα ή δύο** και είναι απαραίτητη στη λύση εξισώσεων διαφορών πρώτης και δεύτερης τάξης με τη βοήθεια μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ (βλ. Ενότητα 13.4).

Πρόταση 13.3 *Αν x_n μία αιτιατή ακολουθία, τότε:*

- *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$y_n = x_{n+1}$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = zX(z) - zx_0,$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της x_n.

- *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$y_n = x_{n+2},$$

είναι

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n+2}\} = z^2X(z) - z^2x_0 - zx_1.$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 13.1 του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ προκύπτει

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z\frac{x_{n+1}}{z^{n+1}} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{z^{n+1}}, \qquad (i)$$

οπότε, αλλάζοντας το δείκτη άθροισης σε $k = n+1$, η (i) δίνει

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = z\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} - zx_0 = zX(z) - zx_0.$$

Όμοια αποδεικνύεται και η άλλη ιδιότητα.

Παράδειγμα 13.11 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ των ακολουθιών*

α) $y_n = \sin(n+1)\omega$ *β)* $v_n = \sinh(n+2)\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

Λύση

α) Επειδή $$y_n = x_{n+1}, \quad \text{όπου } x_n = \sin n\omega,$$
σύμφωνα με την Πρόταση 13.3,
$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n+1}\} = z\mathcal{Z}\{x_n\} - zx_0, \quad \text{όπου} \quad x_0 = \sin 0\omega = 0 \qquad (i)$$
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,
$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{\sin n\omega\} = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1},$$
οπότε η (i) δίνει
$$\mathcal{Z}\{y_n\} = z\frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{z^2\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$
β) Επειδή
$$v_n = x_{n+2}, \quad \text{όπου} \quad x_n = \sinh n\omega,$$
σύμφωνα με την Πρόταση 13.3,
$$\mathcal{Z}\{v_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n+2}\} = z^2\mathcal{Z}\{x_n\} - z^2x_0 - zx_1, \qquad (ii)$$
όπου $$x_0 = \sinh 0\omega = 0 \quad \text{και} \quad x_1 = \sinh\omega.$$
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,
$$\mathcal{Z}\{x_n\} = \mathcal{Z}\{\sinh n\omega\} = \frac{z\sinh\omega}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1},$$
οπότε η (ii) δίνει
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{v_n\} &= z^2\frac{z\sinh\omega}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1} - z\sinh\omega = z\sinh\omega\frac{z^2 - (z^2 - 2z\cosh\omega + 1)\omega}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1}\\ &= z\sinh\omega\frac{(2z\cosh\omega - 1)\omega}{z^2 - 2z\cosh\omega + 1}.\end{aligned}$$
■

Με επαγωγή αποδεικνύεται, επίσης, η Πρόταση 13.4, η οποία είναι απαραίτητη στη λύση εξισώσεων διαφορών ανώτερης τάξης:

Πρόταση 13.4 *Αν x_n μία αιτιατή ακολουθία, τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*
$$y_n = x_{n+n_0}, \quad n_0 \in N \text{ σταθερά},$$
είναι $$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{x_{n+n_0}\} = z^{n_0}\mathcal{Z}\{x_n\} - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k z^{n_0-k}.$$

Αποδεικνύεται ότι για το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ του γινομένου μίας ακολουθίας επί a^n ισχύει:

Πρόταση 13.5 *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*
$$y_n = a^n x_n, \quad a \text{ σταθερά},$$
όπου x_n μία αιτιατή ακολουθία, είναι
$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{a^n x_n\} = z^{n_0}X\left(\frac{z}{a}\right),$$
όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας x_n.

Παράδειγμα 13.12 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*
$$y_n = e^{\beta n}\sin n\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \beta, \omega \text{ σταθερές}.$$

Λύση

Επειδή $$y_n = e^{\beta n}\sin n\omega = a^n x_n, \quad \text{όπου } a = e^{\beta} \quad \text{και} \quad x_n = \sin n\omega,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.5,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{a^n x_n\} = X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad (ii)$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας x_n.
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\sin n\omega\} = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}, \quad |z| > 1,$$

οπότε η (i) δίνει $$\mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{\dfrac{z}{e^{\beta}}\sin\omega}{\left(\dfrac{z}{e^{\beta}}\right)^2 - 2\dfrac{z}{e^{\beta}}\cos\omega + 1} = \frac{ze^{\beta}\sin\omega}{z^2 - ze^{\beta}\cos\omega + e^{2\beta}}.$$

■

Αποδεικνύεται ότι για το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ του γινομένου μίας αιτιατής ακολουθίας επί την ακολουθία n^k ισχύει:

Πρόταση 13.6 *Ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας*

$$y_n = n^k x_n, \quad k \in N^* \text{ σταθερά,}$$

όπου x_n μία αιτιατή ακολουθία, είναι

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{n^k x_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z),$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας x_n.

Παράδειγμα 13.13 *α) Να δειχθεί ότι:*

i) $$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad ii) \qquad \mathcal{Z}\{n^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $a_n = n^3$.

Λύση

α) $i)$ Επειδή $$y_n = n = nx_n, \quad \text{όπου} \quad x_n = u_n,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.6, $$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{nx_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)X(z), \qquad (i),$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $x_n = u_n$.
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{u_n\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1,$$

οπότε η (i) δίνει

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z\frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

$ii)$ Επειδή $$y_n = n^2 = nx_n, \quad \text{όπου} \quad x_n = n,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.6 και το α) $i)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_n\} &= \mathcal{Z}\{nx_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)X(z) = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right] = -z\frac{(z-1)^2 - z2(z-1)}{(z-1)^4}\\ &= -z\frac{(z-1)(-z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.\end{aligned}$$

β) Επειδή $$a_n = n^3 = ny_n, \quad \text{όπου} \quad y_n = n^2,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.6,

$$\mathcal{Z}\{a_n\} = \mathcal{Z}\{ny_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)Y(z), \qquad (ii)$$

όπου $Y(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $y_n = n$, οπότε, λόγω και του (α),

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a_n\} &= -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right] = -z\frac{(z-1)^3(2z+1) - z(z+1)3(z-1)^2}{(z-1)^6}\\ &= -z\frac{(z-1)^2\left[2z+1-3z^2-3z\right]}{(z-1)^6} = \frac{z(3z^2+z-1)}{(z-1)^4}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 13.14 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ των αιτιατών ακολουθιών:*

α) $y_n = ne^{-an}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *a σταθερά,* *β)* $y_n = n^2 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Λύση

α) Επειδή $$y_n = ne^{-an} = nx_n, \quad \text{όπου} \quad x_n = e^{-an},$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.6,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{nx_n\} = -z\frac{d}{dz}X(z), \qquad (ii)$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $x_n = e^{-an}$.
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{e^{-an}\} = \frac{z}{z-e^{-a}}, \quad |z| > e^{-a},$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-e^{-a}}\right) = -z\frac{z-e^{-a}-z}{(z-e^{-a})^2} = \frac{ze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}, \quad |z| > e^{-a}.$$

β) Επειδή $$y_n = n^2 2^n = n^2 x_n, \quad \text{όπου} \quad x_n = 2^n,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 13.6,

$$\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{n^2 x_n\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z), \qquad (ii)$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας $x_n = 2^n$.
Σύμφωνα με τον Πίνακα 13.1,

$$X(z) = \mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}, \quad |z| > 2,$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y_n\} &= \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{z}{z-2}\right) = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left[z\frac{-2}{(z-2)^2}\right] = -2z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-2)^2}\right]\\ &= -2z\frac{(z-2)^2 - z2(z-2)}{(z-2)^4} = -2z\frac{(z-2)(-z-2)}{(z-2)^4} = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}.\end{aligned}$$

■

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι ισχύουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα για τα όρια μίας ακολουθίας και του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$ αυτής. Το πρώτο, που λέγεται **θεώρημα αρχικής τιμής**, είναι το εξής:

Θεώρημα 13.1 *Αν η ακολουθία x_n έχει μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ $X(z)$, τότε*

$$x_0 = \lim_{z\to+\infty} X(z).$$

Το δεύτερο θεώρημα λέγεται **θεώρημα τελικής τιμής**.

Θεώρημα 13.2 *Αν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης*

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z),$$

όπου $X(z)$ ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της ακολουθίας x_n, είναι μέσα στο μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{z\to 1}\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z).$$

13.3 Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$

Ορισμός 13.3 *Ορίζουμε ως αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της μιγαδικής συνάρτησης $X(z)$ μία ακολουθία x_n (αν υπάρχει), τέτοια ώστε*

$$\mathcal{Z}\{x_n\} = X(z)$$

και γράφουμε

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x_n.$$

Στη γενική περίπτωση δεν υπάρχει αντίστροφος μετασχηματισμός Z μίας συνάρτησης.

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ μίας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια των μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ βασικών συναρτήσεων του Πίνακα 13.1, όπως στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 13.15 *Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης*

$$X(z) = \frac{z}{z+4}.$$

Λύση

Σύμφωνα τον Πίνακα 13.1,

$$\mathcal{Z}\left\{(-4)^n\right\} = \frac{z}{z-(-4)} = X(z).$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 13.3, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης αυτής είναι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = (-4)^n, \quad n > 0.$$

■

Από την Πρόταση 13.1 προκύπτει ότι:

Πρόταση 13.7 *Ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων είναι ο γραμμικός συνδυασμός των αντιστρόφων μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$ αυτών, δηλαδή*

$$\mathcal{Z}^{-1}\{\alpha X_1(z)+\beta X_2(z)\} = \alpha\mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)\}+\beta\mathcal{Z}^{-1}\{X_2(z)\}, \quad a,\beta\in C \text{ σταθερές.}$$

Από την Πρόταση 13.2 προκύπτει ότι:

Πρόταση 13.8 *Αν ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης $X(z)$ είναι η ακολουθία x_n και*

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0,$$

τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης

$$Y(z) = \frac{X(z)}{z^k}$$

είναι

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{X(z)}{z^k}\right\} = x_{n-k}u_{n-k} = x_{n-k}, \quad n = k, k+1, \ldots, k\in N \text{ σταθερά,}$$

Παράδειγμα 13.16 *Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της συνάρτησης*

$$X(z) = \frac{1}{z^m(z-a)}, \quad m \in N \text{ σταθερά}, \tag{i}$$

είναι $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{1}{z^m(z-a)}\right\} = a^{n-(m+1)}u_{n-(m+1)} = a^{n-(m+1)}, \quad n = m+1, m+2, \ldots.$

Λύση

Η (i) γράφεται $(k = m+1)$ $\qquad X(z) = \dfrac{1}{z^{(m+1)-1}(z-a)} = \dfrac{1}{z^{k-1}(z-a)},$

οπότε, λόγω της (13.1), ο αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ της $X(z)$ είναι

$$\begin{aligned} x_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^{k-1}(z-a)}\right\} = a^{n-k}u_{n-k} = a^{n-(m+1)}u_{n-(m+1)}, \quad n = m+1, m+2, \ldots \\ &= \begin{cases} 0, & n < m+1 \\ a^{n-(m+1)}, & n \geq m+1 \end{cases} \end{aligned}$$

■

Ο Πίνακας 13.2 περιέχει κάποιους αντίστροφους μετασχηματισμούς $\mathcal{Z}$, οι οποίοι, σε συνδυασμό με την Παρατ. 13.3, είναι πολύ χρήσιμοι στην εύρεση αντίστροφων μετασχηματισμών $\mathcal{Z}$.

Πίνακας 13.2 Αντίστροφοι μετασχηματισμοί $\mathcal{Z}$.

Συνάρτηση	**Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$ $(n > 0)$**
$\dfrac{z}{z-1}$	$1 = u_n = \{1, 1, \ldots\}$
$\dfrac{z}{z-a}$	a^n
$\dfrac{z}{z-e^{\tau}}$	$e^{n\tau}$
1	$\delta_n = \{1, 0, 0 \ldots\}$
$\dfrac{1}{z}$	$\delta_{n-1} = \{0, 1, 0, 0 \ldots\}$
$\dfrac{1}{z-1}$	$u_{n-1} = \{0, 1, 1, \ldots\}$
$\dfrac{1}{z-a}$	$a^{n-1}u_{n-1} = a^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$
$\dfrac{1}{z^k(z-1)}$	$u_{n-(k+1)} = 1, \quad n = k+1, k+2, \ldots$
$\dfrac{1}{z^k(z-a)}$	$a^{n-(k+1)}u_{n-(k+1)} = a^{n-(k+1)}, \quad n = k+1, k+2, \ldots$
$\dfrac{1}{z^k}$	$\delta_{n-k} = \{0, 0, \ldots, 1, 0, 0 \ldots\}$
$\dfrac{z}{(z-a)^2}$	$na^{n-1}u_n$
$\dfrac{1}{(z-a)^2}$	$(n-1)a^{n-2}u_{n-1}$