Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί & Μιγαδικές Συναρτήσεις

συνδεδεμένο περιεχόμενο

QR biblio

Νίκος Μυλωνάς • **Χρήστος Σχοινάς**

Μαθηματικός - Φυσικός, Α.Π.Θ. **Καθηγητής Δ.Π.Θ.**

ΤΖΙΟΛΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

9.2 Ανάπτυγμα Fourier

Ορισμός 9.1 *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική στο R με περίοδο $2l$, τότε ορίζουμε ως* ***ανάπτυγμα Fourier*** *ή* ***σειρά Fourier*** *αυτής την σειρά*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{9.10}$$

όπου οι σταθερές A_n και B_n, που λέγονται ***συντελεστές Fourier****, είναι*

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \tag{9.11}$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \tag{9.12}$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{9.13}$$

Από το Θεώρημα 6.2 προκύπτει το επόμενο θεώρημα, στο οποίο στηρίζεται η ανάπτυξη μίας τμηματικά συνεχούς περιοδικής συνάρτησης σε σειρά Fourier.

Θεώρημα 9.1 *Αν η συνάρτηση $f(x)$:*

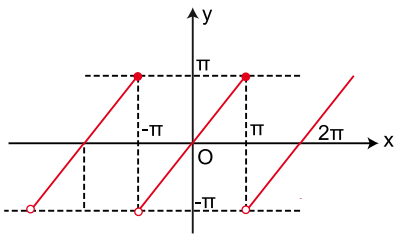
- *είναι ορισμένη στο R εκτός ίσως από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων,*
- *είναι περιοδική με περίοδο $2l$,*
- *είναι συνεχής ή τμηματικά συνεχής,*

τότε η σειρά Fourier (9.10) συγκλίνει στην συνάρτηση $f(x)$, οπότε λέμε ότι η $f(x)$ ***αναπτύσσεται σε σειρά Fourier*** *και γράφουμε*

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

όπου οι συντελεστές Fourier δίνονται από τις (9.11-13).

Παράδειγμα 9.1 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$ με τη γραφική παράσταση του Σχήματος 9.1*



Σχήμα 9.1 *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του Παραδείγματος 9.1.*

Λύση

Από το Σχήμα 9.1 φαίνεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το R εκτός των σημείων $x = k\pi,\ k \in Z$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1, αναπτύσσεται στη σειρά Fourier

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{i}$$

όπου ($l = \pi$)

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (ii)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Από το Σχήμα 9.1 φαίνεται ότι

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Η συνάρτηση $f(x)$ και η $f(x)\cos nx$ είναι περιττές, ενώ η $f(x)\sin nx$ άρτια, οπότε οι (ii) δίνουν

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos nx}{n}dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left(-\pi\cos n\pi + 0 + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Επομένως, από την (i) προκύπτει το ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$

$$f(x) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

■

Όπως και στο Παράδειγμα 9.1, προκύπτει ότι:

Παρατήρηση 9.2 *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής, περιοδική με περίοδο $2l$ και:*

- ***περιττή**, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier που περιέχει μόνο ημίτονα*

$$f(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (9.14)$$

όπου

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (9.15)$$

- ***άρτια**, τότε αναπτύσσεται σε σειρά Fourier που περιέχει μόνο συνημίτονα*

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \qquad (9.16)$$

όπου

$$A_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \quad \text{και} \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (9.17)$$

Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη και συνεχής μόνον στο $(-l, l)$, τότε την επεκτείνουμε ως περιοδική σε όλο το R, οπότε μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier της.

Αν η συνάρτηση είναι ορισμένη και συνεχής μόνον στο $(0, l)$, τότε την επεκτείνουμε ως περιττή ή άρτια στο $(-l, 0)$ και στη συνέχεια ως περιοδική σε όλο το R, οπότε μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα Fourier της.

Παράδειγμα 9.2 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

Λύση

Επεκτείνουμε την $f(x)$ ως περιττή στο $(-\pi, 0)$ και στη συνέχεια ως περιοδική σε όλο το R, οπότε

προκύπτει η συνάρτηση με τη γραφική παρασταση του Σχήματος 9.2α, η οποία σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1, αναπτύσσεται στη σειρά Fourier

$$f(x) = B_n \sin nx, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

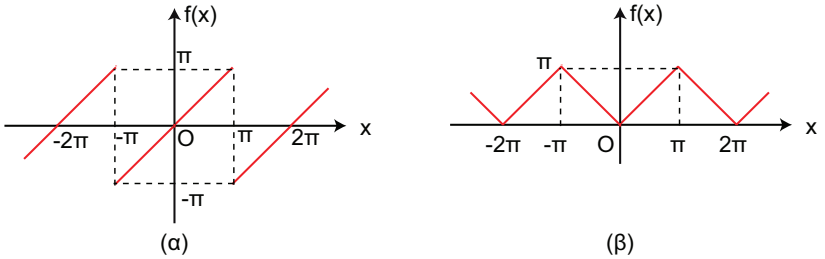
όπου (βλ. Παράδειγμα 9.1)

$$B_n = 2\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

οπότε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την $f(x)$ ως άρτια στο $(-\pi, 0)$ και στη συνέχεια ως περιοδική σε όλο το R, οπότε προκύπτει η συνάρτηση με τη γραφική παρασταση του Σχήματος 9.2β, η οποία σύμφωνα με την Παρατήρηση 9.1, αναπτύσσεται στη σειρά Fourier



Σχήμα 9.2 *Η γραφική παρασταση της συνάρτησης $f(x)$ του Παραδείγματος 9.2 αν επεκταθεί ως: α) περιττή β) άρτια*

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} = \frac{A_0}{2} + A_n \cos nx, \quad n = 1, 2, \cdots, \qquad (i)$$

όπου

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

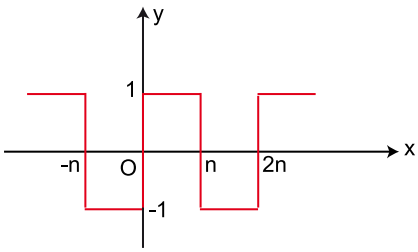
$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

οπότε η (i) δίνει ($n = 2k+1,\ k = 0, 1, \cdots$, αφού n περιττός)

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2\pi}.$$

Παράδειγμα 9.3 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$ με τη γραφική παράσταση του Σχήματος 9.3.*



Σχήμα 9.3 *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του Παραδείγματος 9.3*

Λύση

Από το Σχήμα 9.3 φαίνεται ότι η $f(x)$ είναι περιττή και περιοδική με περίοδο $2l = 2\pi \Leftrightarrow l = \pi$, οπότε το ανάπτυγμα Fourier της είναι της μορφής (βλ. Παρατήρηση 9.1)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \qquad (i)$$

όπου
$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (ii)$$

Από το Σχήμα 9.3 φαίνεται ότι
$$f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi,$$
οπότε η (ii) δίνει

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n = 2k \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{αν } n = 2k+1. \end{cases}$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει η επόμενη πρόταση (καθώς και άλλες αντίστοιχες), η οποία είναι απαραίτητη στη λύση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με τη βοήθεια αναπτύγματος Fourier (βλ. ενότ. 5.3).

Πρόταση 9.1 *Αν το ανάπτυγμα Fourier μίας δύο φορές παραγωγίσιμης περιττής και περιοδικής με περίοδο $2l$ συνάρτησης $f(x)$ είναι*
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{\pi},$$
τότε:

- *Το ανάπτυγμα Fourier της παραγώγου της είναι*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)} \sin \frac{n\pi x}{\pi}, \quad \text{όπου } B_n^{(1)} = -\frac{n\pi}{l} B_n.$$
- *Το ανάπτυγμα Fourier της δεύτερης παραγώγου της είναι*
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)} \sin \frac{n\pi x}{\pi}$$

όπου
$$B_n^{(2)} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} B_n + \frac{n\pi}{l} [f(0) - f(l) \cos n\pi].$$

9.2.1 Ανάπτυγμα Fourier με το Matlab

Η εύρεση του αναπτύγματος Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης $f(x)$, περιόδου T γίνεται εύκολα υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα των (9.11-13) με τη βοήθεια των παρακάτω εντολών του Matlab

```
syms n x
T=...;

a0=(2/T)*int(f(x),x,0,T);

an=(2/T)*int(f(x)*cos(2*n*pi*x/T),0,T);

bn=(2/T)*int(f(x)*sin(2*n*pi*x/T),0,T);
```

εισάγοντας σε κάθε περίπτωση τη συνάρτηση $f(x)$ και την περιόδο της T, όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.4 *Να βρεθεί το ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης $f(x)$ με τη γραφική παράσταση του Σχήματος 9.4*

Λύση

Από το Σχήμα 9.4 φαίνεται ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής σε όλο το R εκτός των σημείων

$x = k,\ k \in Z$ και περιοδική με περίοδο $T = 1$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1, αναπτύσσεται στη σειρά Fourier

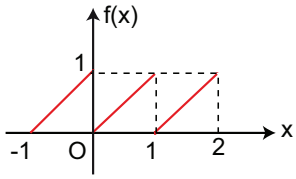
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (i)$$

όπου

$$l = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

και

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (ii)$$



Σχήμα 9.4 *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του Παραδείγματος 9.4*

Από το Σχήμα 9.4 φαίνεται ότι $\qquad f(x) = x, \quad x \in [0,1].$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα της (ii) με τη βοήθεια των παρακάτω εντολών του Matlab

```
syms n x
T=1;
a0=(2/T)*int(x,x,0,T;
an=(2/T)*int(x*cos(2*n*pi*x/T),0,T;
bn=(2/T)*int(x,sin(2*n*pi*x/T),0,T;
```

από την εκτέλεση της οποίας προκύπτει

```
a0=1
an=-(2*sin(pi*n)^2-2*pi*n*sin(2*pi*n))/(2*pi^2*n^2)
bn=(sin(2*pi*n)-2*pi*n*cos(2*pi*n))/(2*pi^2*n^2)
```

Επειδή το n είναι ακέραιος,

$$\sin(\pi n) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \text{και} \quad \cos(2\pi n) = 1,$$

οπότε η παραπάνω λύση δίνει $\qquad a_n = 0 \quad \text{και} \quad b_n = -\dfrac{1}{\pi^2 n^2}.$

Επομένως, από την (i) προκύπτει ότι το ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$ είναι

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2}\sin 2\pi n x.$$

9.3 Εκθετικό ανάπτυγμα Fourier

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με μία άλλη χρήσιμη μορφή του αναπτύγματος Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης, το εκθετικό ανάπτυγμα Fourier.

Θεώρημα 9.2 *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιοδική στο R με περίοδο $2l$, τότε μπορεί να αναπτυχθεί στη σειρά*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \qquad (9.18)$$

που λέγεται ***εκθετική σειρά Fourier*** *ή* ***εκθετικό ανάπτυγμα Fourier*** *της $f(x)$. Οι μιγαδικές σταθερές a_n, που λέγονται* ***συντελεστές του εκθετικού αναπτύγματος Fourier*** *της $f(x)$ είναι*

$$a_n(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx, \quad n \in Z. \qquad (9.19)$$