Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί & Μιγαδικές Συναρτήσεις

συνδεδεμένο περιεχόμενο

QR biblio

Νίκος Μυλωνάς • **Χρήστος Σχοινάς**

Μαθηματικός - Φυσικός, Α.Π.Θ. **Καθηγητής Δ.Π.Θ.**

ΤΖΙΟΛΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

8.1 Βασικές έννοιες

Οι μετασχηματισμοί Laplace αποτελούν ειδικές περιπτώσεις μίας γενικής κατηγορίας μετασχηματισμών που είναι γνωστοί ως γενικευμένοι γραμμικοί ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί. Αυτοί οι μετασχηματισμοί νοούνται ως μαθηματικοί τελεστές που δρουν επί μίας συνάρτησης εισόδου $f(t)$ και παράγουν μία συνάρτηση εξόδου

$$F(s) = T[f(t)] = \int_{s_1}^{s_2} k(s,t)f(t)dt \tag{8.1}$$

όπου s μεταβλητή πραγματική ή γενικότερα μιγαδική. Στην παραπάνω εξίσωση, η συνάρτηση $k(s,t)$ ονομάζεται **πυρήνας** (kernel) του μετασχηματισμού. Εάν για τη συνάρτηση του πυρήνα υφίσταται η αντίστροφη συνάρτηση $k^{-1}(t,s)$, τότε υπάρχει και ο αντίστροφος ολοκληρωτικός μετασχηματισμός ο οποίος ορίζεται ως

$$f(t) = T^{-1}[F(s)] = \int_{t_1}^{t_2} k^{-1}(t,s)F(s)ds \tag{8.2}$$

Ανάλογα με τις τιμές των ορίων των ολοκληρωμάτων s_1, s_2 και t_1, t_2 και της συνάρτησης πυρήνα $k(s,t)$ υπάρχουν αρκετοί γενικευμένοι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί που βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορα προβλήματα:

- Στο μετασχηματισμό Laplace ο πυρήνας είναι η συνάρτηση e^{-st}, όπου s μεταβλητή πραγματική ή γενικότερα μιγαδική, και τα όρια από 0 ως $+\infty$ (μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace) ή από $-\infty$ ως $+\infty$ (αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace).
- Στο μετασχηματισμό Fourier) (βλ. κεφ. 9) ο πυρήνας είναι η συνάρτηση $e^{-i\omega t}$, όπου η μεταβλητή $s = i\omega,\ \ \omega \in R$ είναι φανταστική.

Ορισμός 8.1 *Ορίζουμε ως **μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace** (αν υπάρχει) της συνάρτησης $f(t),\ \ t > 0$ τη συνάρτηση*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

όπου s πραγματική ή μιγαδική μεταβλητή.
Ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ λέμε ότι υπάρχει, αν το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποιες τιμές της s. Αλλιώς, δηλαδή αν το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει για καμία τιμή s, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Για το σκοπό του βιβλίου αυτού ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace με s **πραγματικό** είναι επαρκής. Έτσι στο εξής, όταν θα αναφέρεται η έννοια "μετασχηματισμός Laplace " θα εννοείται πάντοτε ο μονόπλευρος που δίνεται από τον Ορισμό 8.1, όπου s πραγματική μεταβλητή.

Παράδειγμα 8.1 *Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:*

α) $f(t) = e^{at},\ \ a \in R,\ t > 0$ *β)* $f(t) = e^{t^2},\ \ t > 0$

Λύση

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1:

α) Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης αυτής είναι

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{(a-s)t}dt. \tag{i}$$

Παρατηρούμε ότι για $a - s < 0 \ \Leftrightarrow\ s > a$ το γενικευμένο αυτό ολοκλήρωμα συγκλίνει ενώ για $s \le a$ αποκλίνει, οπότε από την (i) προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της e^{at} υπάρχει για $s > a$ και είναι

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^{+\infty} = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^M = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a},\quad s > a.$$

β) Επειδή το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2}e^{-st}dt$$

αποκλίνει για κάθε $s \in R$, ο μετασχηματισμός Laplace της e^{t^2} δεν υπάρχει.

Ορισμός 8.2 *Μία συνάρτηση $f(t)$, $t > 0$ λέγεται **εκθετικής τάξης** α εάν υπάρχουν πραγματικές σταθερές $M \geq 0$ και $K > 0$ καθώς και πραγματική παράμετρος α, τέτοιες ώστε*

$$|f(t)| \leq Ke^{\alpha t} \quad \text{για τιμές } t \geq M.$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει το επόμενο θεώρημα με το οποίο μπορούμε να συνάγουμε σε πολλές περιπτώσεις την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης.

Θεώρημα 8.1 *Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής (δηλαδή συνεχής εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων) για κάθε θετική τιμή του T και εκθετικής τάξης α, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \text{ για } s > \alpha.$$

Παράδειγμα 8.2 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της σταθερής συνάρτησης*

$$f(t) = c, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Λύση

Από τον Ορισμό 8.1 προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = c$ είναι

$$F(s) = \int_0^{+\infty} ce^{-st}dt = c \lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{-st}dt = c \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^M = c \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{e^{-sM}}{s} + \frac{1}{s}\right]. \qquad (i)$$

Για $s < 0$,
$$\lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{e^{-sM}}{s} + \frac{1}{s}\right] = -\infty + 0 = -\infty,$$

οπότε το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Για $s > 0$,
$$\lim_{M\to+\infty} \frac{e^{-sM}}{s} = 0$$

οπότε η (i) δίνει
$$F(s) = \frac{c}{s}, \quad s > 0.$$

Παράδειγμα 8.3 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της ταυτοτικής συνάρτησης*

$$f(t) = t.$$

Λύση

Από τον Ορισμό 8.1 προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = t$ είναι (εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M te^{-st}dt = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{Me^{-sM}}{s} - \frac{e^{-sM}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]. \end{aligned}$$

Για $s < 0$ το όριο αυτό προκύπτει $-\infty$, οπότε το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει. Για $s > 0$, το παραπάνω όριο υπολογίζεται με τη βοήθεια του κανόνα De Hospital, οπότε προκύπτει

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Παράδειγμα 8.4 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των τριγωνομετρικών συνάρτησεων*
α) $f(t) = \sin\omega t, \quad t > 0$ *β)* $f(t) = \cos\omega t, \quad t > 0.$

Λύση

α) Από τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \sin\omega t, \quad t > 0$$

είναι

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-st}dt = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}(s\sin\omega t + \omega\cos\omega t)\right]_0^M \\ &= \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{e^{-sM}}{s^2+\omega^2}(s\sin\omega M + \omega\cos\omega M)\right]. \end{aligned} \tag{i}$$

Για $s < 0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - e^{-sM}(s\sin\omega M + \omega\cos\omega M)\right] = -\infty,$$

οπότε το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα δε συγκλίνει.
Για $s > 0$, προκύπτει ότι

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - e^{-sM}(s\sin\omega M + \omega\cos\omega M)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

οπότε η (i) δίνει
$$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0.$$

β) Όμοια προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = \cos\omega t, \quad t > 0$$

είναι
$$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0.$$

8.1.1 Εύρεση μετασχηματισμού Laplace με χρήση του Matlab

Η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace μίας συνάρτησης $f(t)$ με το Matlab γίνεται με την εντολή `laplace(f(t))` όπως στο επόμενο παράδειγμα

Παράδειγμα 8.5 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων*
α) $f(t) = e^{-4t}\cos 2t$ *β)* $f(t) = t^3e^{-4t}\cos 2t$ *γ)* $f(t) = t\sin(5t-2)$
δ) $f(t) = t\,e^{t^2}\sin 3t$ *ε)* $f(t) = t^2e^{-2t}\sinh 5t$

Λύση

α) Αφού ορίσουμε τις syms μεταβλητές s, t χρησιμοποιούμε την εντολή `laplace(f(t))`

```
syms s t
laplace(exp(-4*t)*cos(2*t))
```

Από την εκτέλεση προκύπτει

```
(s + 4)/((s + 4)^2 + 4)
```

Εκτελώντας στη συνέχεια την εντολή

```
simple(ans)
```

προκύπτει η λύση στην μορφή

```
(s + 4)/(s^2 + 8*s + 20)
```

Εκτελώντας τέλος την εντολή

```
pretty(ans)
```

Από την εκτέλεση προκύπτει η απάντηση στην πιο βολική μορφή της

$$\frac{s+4}{(s+4)^2+4}$$

β) Με τις εντολές

```
syms s t
laplace(t^3*exp(-4*t)*cos(2*t))
pretty(simple(ans))
```

προκύπτει η λύση στην πιο βολική μορφή της

$$\frac{6(s^2+4s-4)(s^2+12s+28)}{(s^2+8s+20)^4}$$

γ) Με τις εντολές

```
syms s t
laplace(t*sin(5*t-2))
pretty(simple(ans))
```

προκύπτει η λύση στην πιο βολική μορφή της

$$\frac{-\sin(2)s^2+10\cos(2)s+25\sin(2)}{(s^2+25)^2}$$

δ) Με τις εντολές

```
syms s t
laplace(t*exp(t^2)*sin(3*t))
pretty(simple(ans))
```

προκύπτει η απάντηση από το Matlab στη βολική μορφή της

$$\frac{1}{4}\left\{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{(3+si)^2}{4}}\left(\frac{s}{2}+\frac{3i}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{s}{2}-\frac{si}{2}\right)-1\right]\right\}-\frac{1}{4}\left\{\pi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{(3+si)^2}{4}}\left(\frac{s}{2}-\frac{3i}{2}\right)\left(\operatorname{erf}\left(\frac{s}{2}+\frac{si}{2}\right)+1\right]\right\}$$

ε) Με τις εντολές

```
syms s t
laplace(t^2*exp(-2*t)*sinh(5*t))
pretty(simple(ans))
```

προκύπτει η απάντηση από το Matlab στη βολική μορφή της

$$\frac{1}{(s-3)^3}-\frac{1}{(s+7)^3}$$

8.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Στην ενότητα αυτή δίνουμε χωρίς απόδειξη (για απόδειξη βλ. Αθ. Μάργαρη, Σήματα και συστήματα, εκδόσεις Τζιόλα) κάποιες προτάσεις, με τη βοήθεια των οποίων η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace γίνεται πολύ πιο εύκολη σε πολλές περιπτώσεις.

Πρόταση 8.1 *Ο μετασχηματισμός Laplace ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων είναι ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των μετασχηματισμών Laplace των συναρτήσεων αυτών, δηλαδή*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}, \quad a, \beta \in R \text{ σταθερές.}$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^{+\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)]e^{-st}dt \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt + \beta \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt \\
&= \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.6 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των υπερβολικών συνάρτησεων*
α) $f(t) = \sinh at, \quad t > 0$ *β)* $f(t) = \cosh at, \quad t > 0.$

Λύση

α) Επειδή

$$f(t) = \sinh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right)$$

από την Πρόταση 8.1 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{\sinh \alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} - \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}\right) \tag{i}$$

Στο Παράδειγμα 8.1α δείξαμε ότι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}, \quad s > a \tag{ii}$$

οπότε

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \mathcal{L}\{e^{-(-\alpha)t}\} = \frac{1}{s-(-\alpha)} = \frac{1}{s+\alpha}, \quad s > -a. \tag{iii}$$

Έτσι η (i) δίνει

$$\mathcal{L}\{\sinh \alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}, \quad s > |a|.$$

β) Επειδή

$$\cosh(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2},$$

από την Πρόταση 8.1 προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{\cosh \alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} + \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}\right), \quad s > |a| \tag{iv}$$

οπότε, λόγω των (ii) και (iii), η (iv) δίνει

$$\mathcal{L}\{\cosh \alpha t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$$

Πρόταση 8.2 *Αν η συνάρτηση $f(t)$, $t > 0$ είναι εκθετικής τάξης a και συνεχής και η παράγωγός της είναι τμηματικά συνεχής, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της υπάρχει για $s > a$ και είναι*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+), \quad s > a,$$

όπου

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

Παράδειγμα 8.7 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$f(t) = t^n, \ \ t > 0.$$

Λύση

Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.1, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$f(t) = t^n$$

είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} t^n\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)' dt = \left[-t^n\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}(t^n)'dt \\ &= \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}.\end{aligned} \tag{i}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^n\} &= \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} \\ \mathcal{L}\{t^{n-1}\} &= \frac{n-1}{s}\mathcal{L}\{t^{n-2}\} \\ \mathcal{L}\{t^{n-2}\} &= \frac{n-2}{s}\mathcal{L}\{t^{n-3}\} \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{t\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{t^0\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},\end{aligned}$$

αφού

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Αντικαθιστώντας αναδρομικά στην πρώτη εκ των παραπάνω σχέσεων τις υπόλοιπες σχέσεις, προκύπτει

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\cdots\frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

■

Με επαγωγή από την Πρόταση 8.2 προκύπτει ότι:

Πρόταση 8.3 *Αν η συνάρτηση $f(t)$, $t > 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a και η νιοστή παράγωγος της $f^n(t)$ είναι τμηματικά συνεχής, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της $f^n(t)$ υπάρχει για $s > a$ και είναι*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+),$$

όπου

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(t).$$

Η πρόταση αυτή είναι απαραίτητη στη λύση διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια μετασχηματισμών Laplace (βλ. Ενότητα 8.6).

■

Αν η συνάρτηση $f(t),\ \ t \geq 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a και η παράγωγος της $f'(t)$ είναι τμηματικά συνεχής, τότε παραγωγίζοντας ως προς s τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει

$$\frac{d\mathcal{L}\{f(t)\}}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d(e^{-st})}{ds}dt = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\},\ \ s > a,$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = tf(t)$$

είναι

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d\mathcal{L}\{f(t)\}}{ds},\quad s > a.$$

Παραγωγίζοντας για δεύτερη φορά ως προς s τον Ορισμό 8.1 προκύπτει

$$\frac{d^2\mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^2} = \int_0^\infty (-t)f(t)\frac{d(e^{-st})}{ds}dt = \int_0^\infty t^2 f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\},\ \ s > a,$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$g(t) = t^2 f(t),\ t > 0$$

είναι

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2\mathcal{L}\{f(t)\}}{ds^2},\quad s > a.$$

Με επαγωγή δείχνεται ότι:

Πρόταση 8.4 *Αν η συνάρτηση $f(t),\ \ t \geq 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = t^n f(t)$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n},\quad s > a,$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Παράδειγμα 8.8 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων*

α) $g(t) = t\cosh\alpha t,\ \ t > 0$ *β)* $g(t) = t^2\sin at,\ \ t > 0.$

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.4 και το Παράδειγμα 8.5β, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t) = t\cosh(\alpha t),\ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{t\cosh\alpha t\} = -\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}\{\cosh\alpha t\}\Big) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right) = \frac{s^2+\alpha^2}{(s^2-\alpha^2)^2}.$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t) = t^2\sin at,\ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{t^2\sin at\} = (-1)^2\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d^2F(s)}{ds^2}, \qquad (i)$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin at,\ t > 0$, ο οποίος, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.4α, είναι

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Επειδή

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}$$

και

$$\frac{d^2F(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{6as^2-2a^3}{(s^2+a^2)^3},$$

η (i) δίνει

$$\mathcal{L}\{t^2\sin at\} = \frac{6as^2-2a^3}{(s^2+a^2)^3},\quad s > 0.$$

Πρόταση 8.5 *Αν ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ της συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει για $s > \beta$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = e^{at} f(t), \quad t > 0$$

υπάρχει για $s > a + \beta$ και είναι

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a), \quad s > a + \beta,$$

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a),$$

για
$$s - a > \beta \iff s > a + \beta$$

(αφού ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ της συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει για $s > \beta$).

Παράδειγμα 8.9 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace:*

α) της συνάρτησης $$g(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t, \quad t > 0$$

είναι $$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} \sin \omega t\right\} = \frac{\omega}{\omega^2 + (s-\alpha)^2}, \quad s > \alpha.$$

β) της συνάρτησης $$g(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t, \quad t > 0$$

είναι $$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t} \cos \omega t\right\} = \frac{s-a}{\omega^2 + (s-\alpha)^2}, \quad s > \alpha.$$

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.5, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t, \ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin \omega t\} = F(s-a), \quad s > a + 0, \tag{i}$$

όπου $F(s)$ μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin \omega t, \ t > 0$, ο οποίος, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.4α, είναι

$$F(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}, \quad s > 0.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{\omega^2 + (s-\alpha)^2}, \quad s > \alpha.$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.5, ο μετασχηματισμός Laplace της $g(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t, \ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cos \omega t\} = F(s-a), \quad s > a + 0, \tag{ii}$$

όπου $F(s)$ μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \cos \omega t, \ t > 0$, ο οποίος, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.4β, είναι

$$F(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}, \quad s > 0.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin \omega t\} = \frac{s-a}{\omega^2 + (s-\alpha)^2}, \quad s > \alpha.$$

Παράδειγμα 8.10 *Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace:*

α) της συνάρτησης $$g(t) = e^{\alpha t}\sinh\beta t, \quad t > 0$$

είναι $$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\right\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}, \quad s > \alpha + |\beta|.$$

β) της συνάρτησης $$g(t) = e^{\alpha t}\cosh\beta t, \quad t > 0$$

είναι $$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\cosh\beta t\right\} = \frac{s-a}{(s-\alpha)^2-\beta^2}, \quad s > \alpha + |\beta|.$$

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.6, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t) = e^{\alpha t}\sinh\beta t,\ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\} = F(s-a), \quad s > a + |\beta|, \tag{i}$$

όπου $F(s)$ μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sinh\beta t,\ t > 0$, ο οποίος, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.5α, είναι

$$F(s) = \frac{\beta}{s^2-\beta^2}, \quad s > |\beta|.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2-\beta^2}, \quad s > \alpha + |\beta|.$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.5, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t) = e^{\alpha t}\cosh\beta t,\ t > 0$ είναι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cosh\beta t\} = F(s-a), \quad s > a + |\beta|, \tag{ii}$$

όπου $F(s)$ μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \cosh\beta t$, ο οποίος, σύμφωνα με το Παράδειγμα 8.5β, είναι

$$F(s) = \frac{s}{s^2-\beta^2}, \quad s > |\beta|.$$

Έτσι, από την (i) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sinh\beta t\} = \frac{s-a}{(s-\alpha)^2-\beta^2}, \quad s > \alpha + |\beta|.$$

Πρόταση 8.6 *Αν η συνάρτηση $f(t),\ \ t \geq 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \begin{cases} f(t-t_0), & t > t_0 \\ 0 & 0 \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

είναι $$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-st_0}F(s), \quad s > a,$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Απόδειξη

Από τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}dt = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt.$$

Θέτοντας $t - t_0 = u$,

$$t = t_0 + u, \quad dt = du \quad \text{και για} \quad t = t_0,\ u = 0,$$

οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα δίνει

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{-t_0}^{+\infty} f(u)e^{-s(u+t_0)}du = e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}du = e^{-st_0}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Παράδειγμα 8.11 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right), & t > \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.6, ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(t)$ είναι

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-s\frac{\pi}{4}} F(s), \qquad (i)$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin t$, ο οποίος, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0,$$

οπότε η (i) δίνει

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-s\frac{\pi}{4}} \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

Πρόταση 8.7 *Αν ο μετασχηματισμός Laplace $F(s)$ της συνάρτησης $f(t)$, $t > 0$ υπάρχει για $s > a$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = f(\beta t)$$

υπάρχει για $s > a$ και είναι

$$\mathcal{L}\{f(\beta t)\} = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{s}{\beta}\right), \quad s > a,$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Απόδειξη Από τον Ορισμό 8.1 του μετασχηματισμού Laplace προκύπτει

$$\mathcal{L}\{f(\beta t)\} = \int_0^{+\infty} f(\beta t) e^{-st} dt \qquad (i)$$

Θέτοντας $u = \beta t$,

$$t = \frac{u}{\beta} \quad \text{και} \quad dt = \frac{du}{\beta},$$

οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\mathcal{L}\{f(\beta t)\} = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-\frac{u}{\beta}s} \frac{du}{\beta} = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-u\frac{s}{\beta}} du = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{s}{\beta}\right).$$

Πρόταση 8.8 *Αν η συνάρτηση $f(t)$, $t \ge 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \int_0^t f(u) du, \quad t > 0$$

είναι

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > max(0, a),$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Παράδειγμα 8.12 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \int_0^t u^3 e^u du, \quad t > 0$$

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.8,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u^3 e^u du\right\} = \frac{F(s)}{s}, \qquad (i)$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = t^3 e^t$, ο οποίος, σύμφωνα με την Πρόταση 8.4 και τον Πίνακα 8.1, είναι

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^3 e^t\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\mathcal{L}\{e^t\}\right) = -\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s-1}\right), \quad s > 1. \qquad (ii)$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right) &= -(s-1)^{-2} \\
\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-1}\right) &= \frac{d}{ds}\left(-(s-1)^{-2}\right) = -(-2)(s-1)^{-3} = 2(s-1)^{-3} \\
\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s-1}\right) &= \frac{d}{ds}\left(2(s-1)^{-3}\right) = 2(-3)(s-1)^{-4} = -\frac{6}{(s-1)^4}
\end{aligned}$$

η (ii) δίνει
$$F(s) = -\left(-\frac{6}{(s-1)^4}\right) = \frac{6}{(s-1)^4}, \quad s > 1$$

και η (i)
$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{6}{s(s-1)^4}, \quad s > 1.$$

Πρόταση 8.9 *Αν η συνάρτηση $f(t)$, $t > 0$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης a και το $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ υπάρχει, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}, \quad t > 0$$

είναι
$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u)du, \quad s > max(0, a),$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Παράδειγμα 8.13 *Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης*

$$g(t) = \frac{\sin t}{t}, \; t > 0$$

Λύση

Επειδή

$$g(t) = \frac{\sin t}{t} = \frac{f(t)}{t}, \quad \text{όπου } f(t) = \sin t,$$

και
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

σύμφωνα με την Πρόταση 8.9,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_s^{+\infty} F(u)du, \qquad (i)$$

όπου $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin t$, $t > 0$, ο οποίος, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} ds = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s}.$$