Αυτός ο τρόπος λύσης της διαφορικής αυτής εξίσωσης λέγεται **μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών** και είναι ο πιο απλός, αλλά πολύ χρήσιμος, τρόπος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων που συναντώνται στη Μηχανική, στην Ηλεκτρολογία και στις άλλες φυσικές επιστήμες (βλ. Ενότητα 1.9).

Παρατήρηση 1.1 *Αν μία διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $y(x)$ είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad \text{ή} \quad f_2(y)dy = f_1(x)dx,$$

τότε η γενική της λύση είναι

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c, \quad c \in R.$$

Παράδειγμα 1.2 *Να βρεθεί η συνάρτηση $y(x)$ αν (πρόβλημα αρχικής τιμής)*

$$y'(x) = -2y(x) \quad \text{με} \quad y(x) > 0 \quad \text{και} \quad y(0) = 5. \qquad (i)$$

Λύση

Η (i) γράφεται
$$\frac{dy}{dx} = -2y \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = -2dx$$

οπότε
$$\int \frac{dy}{y} = \int -2dx + c \quad \text{ή } (y(x) > 0) \quad \ln y = -2x + c. \qquad (ii)$$

Επειδή $y(0) = 5$, από την (ii) προκύπτει ότι

$$\ln 5 = -2 \cdot 0 + c \iff c = \ln 5,$$

οπότε η (ii) δίνει

$$\ln y = -2x + \ln 5 \iff \ln y - \ln 5 = -2x \iff \ln \frac{y}{5} = -2x \iff \frac{y}{5} = e^{-2x} \iff y = 5e^{-2x}.$$

Παρατήρηση 1.2 *Σε ορισμένες περιπτώσεις μία διαφορική εξίσωση με μία κατάλληλη αντικατάσταση ανάγεται σε διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.*

Παράδειγμα 1.3 *Να βρεθεί η συνάρτηση $y(x)$ (πρόβλημα αρχικής τιμής) αν*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + y - 2} - 1 \quad \text{με} \quad y(0) = 3. \qquad (i)$$

Λύση

Θέτοντας
$$z(x) = x + y(x) - 2,$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1,$$

οπότε η (i) δίνει
$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sqrt{z} - 1 \iff \frac{dz}{dx} = \sqrt{z}.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, η οποία γράφεται ως

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

οπότε
$$\int z^{-\frac{1}{2}} dz = \int dx + c \iff \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = x + c \iff 2\sqrt{z} = x + c. \qquad (ii)$$

Για $x = 0$ και $y = 3$,
$$z = 0 + 3 - 2 = 1,$$

οπότε η (ii) δίνει
$$2\sqrt{1} = 0 + c \iff c = 2.$$

Έτσι, η (ii) γίνεται $2\sqrt{z} = x + 2 \iff 2\sqrt{x+y-2} = x+2 \iff \sqrt{x+y-2} = \dfrac{x+2}{2}, \quad x+2 \geq 0,$

οπότε
$$x + y - 2 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 \iff x + y - 2 = \frac{x^2}{4} + 1 + x.$$

Άρα
$$y = \frac{x^2}{4} + 3, \quad x \geq -2.$$

1.3 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Πολλές μη διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις μπορούν να μετατραπούν σε διαχωρίσιμες με κατάλληλη αντικατάσταση (βλ. παράτ. 1.2 και Παράδειγμα 1.3). Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μία τέτοια τεχνική για μία κατηγορία διαφορικών εξισώσεων που λέγονται **ομογενείς** και είναι της μορφής (ή μπορούν να γραφούν στη μορφή αυτή)
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.4}$$
όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Κάνοντας την αντικατάσταση $z = \dfrac{y}{x}$, προκύπτει
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xz) = z + x\frac{dz}{dx}, \tag{1.5}$$
οπότε η (1.4) γίνεται
$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z) \iff x\frac{dz}{dx} = f(z) - z \iff \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \tag{1.6}$$

Έτσι η (1.4) μετατράπηκε σε μία διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών για τη συνάρτηση $z(x)$, από τη λύση της οποίας βρίσκουμε την $z(x)$ και στη συνέχεια την $y(x)$ από τη σχέση
$$y(x) = xz(x).$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι:

Παρατήρηση 1.3 *Στις περιπτώσεις στις οποίες μία διαφορική εξίσωση είναι της μορφής (1.4), τότε με τη βοήθεια της αντικατάστασης*
$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$
οδηγούμαστε σε μία ισοδύναμή της διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών για τη συνάρτηση $z(x)$.

Παράδειγμα 1.4 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}. \tag{i}$$

Λύση

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή του δεύτερου μέλους της (i) με x^2 η (i) δίνει
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}}, \tag{ii}$$
οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $z = \dfrac{y}{x}$ η (ii), λόγω και της (1.5) δίνει
$$z + x\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{z} \iff x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}.$$
Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, για την οποία

$$zdz = \frac{dx}{x},$$

οπότε
$$\int zdz = \int \frac{dx}{x} + c \Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = \ln|x| + c \Leftrightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + c.$$

Άρα, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι
$$y^2 = 2x^2(\ln|x| + c).$$

Παράδειγμα 1.5 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής*
$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0, \quad y(1) = 0. \qquad (i)$$

Λύση

Η (i) γράφεται ως
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - \frac{x}{y}. \qquad (ii)$$

οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $z = \frac{y}{x}$ η (ii), λόγω και της (1.5), δίνει
$$z + x\frac{dz}{dx} = 2z - \frac{1}{z} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 1}{z}.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, για την οποία
$$\frac{z}{z^2 - 1}dz = \frac{dx}{x},$$

οπότε
$$\int \frac{z}{z^2 - 1}dz = \int \frac{dx}{x} + c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|z^2 - 1| = \ln|x| + \ln c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|z^2 - 1| - \ln|x| = \ln c$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{|z^2 - 1|}{|x|} = \ln c \Leftrightarrow \ln\sqrt{\frac{|z^2 - 1|}{|x|}} = \ln c$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{|z^2 - 1|}{|x|}} = c \Leftrightarrow |z^2 - 1| = c^2|x|.$$

Έτσι, θέτοντας $z = \frac{y}{x}$, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι ($c_1 = c^2$)
$$\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right| = c_1|x| \Leftrightarrow |y^2 - x^2| = c_1|x|x^2. \qquad (iii)$$

Επειδή $y(1) = 0$, η (iii) δίνει
$$|0^2 - 1^2| = c|1|\,1^2 \Leftrightarrow c_1 = 1,$$

οπότε από την (iii) προκύπτει ότι η λύση αυτού του πρόβληματος αρχικής τιμής είναι
$$|y^2 - x^2| = |x|x^2.$$

■

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής
$$y'(x) = f\left(\frac{a_1x + \beta_1y + \gamma_1}{a_2x + \beta_2y + \gamma_2}\right) \qquad (1.7)$$

στην περίπτωση που το σύστημα
$$a_1x + \beta_1y + \gamma_1 = 0$$
$$a_2x + \beta_2y + \gamma_2 = 0$$

έχει μοναδική λύση $x = x_0$ και $y = y_0$ με την αντικατάσταση
$$X = x - x_0 \quad \text{και} \quad Y = y - y_0$$

μετατρέπονται στην ομογενή διαφορική εξίσωση
$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + \beta_1Y}{a_2X + \beta_2Y}\right).$$

Στις ειδικές περιπτώσεις:

- $a_2 = \beta_2 = 0$, η (1.7) γράφεται ως

$$y'(x) = f(Ax + By + \Gamma),$$

οπότε με την αντικατάσταση $$u = Ax + By + \Gamma,$$

μετασχηματίζεται στην $$\frac{du}{dx} = A + Bf(u)$$

που είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

- Στην περίπτωση στην οποία η (1.7) γράφεται ως

$$y'(x) = f\left(\frac{ax + \beta y + \gamma_1}{\lambda(ax + \beta y) + \gamma_2}\right),$$

τότε με την αντικατάσταση $$u = ax + \beta y,$$

μετασχηματίζεται στην $$\frac{du}{dx} = \beta + Bf\left(\frac{u + \gamma_1}{\lambda u + \gamma_2}\right),$$

που είναι ομογενής διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 1.6 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y'(x) = \frac{2x + 3y - 4}{4x + y - 3}. \qquad (i)$$

Λύση

Λύνουμε το σύστημα

$$2x + 3y - 4 = 0$$
$$4x + y - 3 = 0$$

από το οποίο προκύπτει η μοναδική λύση $x = \frac{1}{2}$ και $y = 1$, οπότε με την αντικατάσταση

$$X = x - \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad Y = y - 1$$

η (i) μετατρέπεται στην ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X + 3Y}{4X + Y}. \qquad (ii)$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με X η (ii) δίνει

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2 + 3\frac{Y}{X}}{4 + \frac{Y}{X}}, \qquad (iii)$$

οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $z = \frac{Y}{X}$ η (ii), λόγω και της (1.5) δίνει

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{2 + 3z}{4 + z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dX} = \frac{2 + 3z}{4 + z} - z \Leftrightarrow x\frac{dz}{dX} = \frac{2 - z - z^2}{4 + z}.$$

Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, για την οποία

$$\frac{4 + z}{2 - z - z^2}dz = \frac{dX}{X},$$

οπότε $$\int \frac{4 + z}{2 - z - z^2}dz = \int \frac{dX}{X} + c. \qquad (iv)$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα προκύπτει ότι

$$\frac{4 + z}{2 - z - z^2} = -\frac{5}{3}\frac{1}{z - 1} + \frac{2}{3}\frac{1}{z + 2},$$

οπότε η (iv) γίνεται

$$\int\left(-\frac{5}{3}\frac{1}{z-1}+\frac{2}{3}\frac{1}{z+2}\right)dz=\int\frac{dX}{X}+c \Leftrightarrow -\frac{5}{3}\ln|z-1|+\frac{2}{3}\ln|z+2|=\ln|X|+c. \qquad (v)$$

Άρα, κάνοντας την αντικατάσταση
$$z=\frac{Y}{X}=\frac{y-1}{x-\frac{1}{2}},$$
από την (v) προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης, σε πεπλεγμένη μορφή, είναι
$$-\frac{5}{3}\ln\left|\frac{y-1}{x-\frac{1}{2}}-1\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{y-1}{x-\frac{1}{2}}+2\right|=\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|+c$$
ή
$$-\frac{5}{3}\ln\left|\frac{2y-2x-1}{2x-1}\right|+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{2y+4x-4}{2x-1}\right|=\ln|2x-1|+c'.$$

Παράδειγμα 1.7 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής*
$$(2x-6y+3)dx-(x-3y+1)dy=0, \quad y(0)=0. \qquad (i)$$

Λύση

Η (i) γράφεται ως
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-6y+3}{x-3y+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2(x-3y)+3}{x-3y+1}. \qquad (ii)$$
οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $z=x-3y$ προκύπτει
$$\frac{dz}{dx}=1-3\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)$$
Έτσι η (ii) γίνεται
$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)=\frac{2z+3}{z+1} \Leftrightarrow -\frac{dz}{dx}=3\frac{2z+3}{z+1}-1 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{5z+8}{z+1}.$$
Αυτή είναι διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, από την οποία προκύπτει
$$\frac{z+1}{5z+8}dz=-dx,$$
οπότε
$$\int\frac{z+1}{5z+8}dz=-\int dx+c. \qquad (iii)$$
Επειδή
$$\frac{z+1}{5z+8}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\frac{1}{5z+8},$$
η (iii) δίνει
$$\int\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\frac{1}{5z+8}\right)dz=-\int dx+c \Leftrightarrow \frac{1}{5}z-\frac{3}{25}\ln|5z+8|=-x+c$$
οπότε, θέτοντας $z=x-3y$, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι
$$\frac{1}{5}(x-3y)-\frac{3}{25}\ln|5(x-3y)+8|+x=c \Leftrightarrow 5(x-3y)-3\ln|5(x-3y)+8|+25x=c_1\ . \qquad (iv)$$
Επειδή $y(1)=0$, η (iv) δίνει
$$5(1-3\cdot 0)-3\ln|5(1-3\cdot 0)+8|+25\cdot 1=c_1 \Leftrightarrow c_1=30-3\ln 13,$$
οπότε από την (iv) προκύπτει ότι η λύση του προβλήματος αυτού αρχικής τιμής σε πεπλεγμένη μορφή είναι
$$5(x-3y)-3\ln|5(x-3y)+8|+25x=30-3\ln 13.$$

1.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 1.2 ***Γραμμική διαφορική εξίσωση α΄ τάξης*** *για τη συνάρτηση $y(x)$ λέμε μία σχέση της μορφής*
$$y'(x)+g(x)y(x)=h(x), \qquad (1.8)$$
όπου $g(x)$ και $h(x)$ συνεχείς συναρτήσεις.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τη διαφορική αυτή εξίσωση επί $e^{\int g(x)dx}$ προκύπτει

$$y'(x)e^{\int g(x)dx} + g(x)y(x)e^{\int g(x)dx} = h(x)e^{\int g(x)dx}$$

ή

$$\left(y(x)e^{\int g(x)dx}\right)' = h(x)e^{\int g(x)dx}$$

οπότε

$$y(x)e^{\int g(x)dx} = \int h(x)e^{\int g(x)dx}dx + c,$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι:

Πρόταση 1.1 *Η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.8) είναι*

$$y(x) = e^{-\int g(x)dx}\left(\int h(x)e^{\int g(x)dx}dx + c\right).$$

Παράδειγμα 1.8 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy' + 2y = x^2. \tag{i}$$

Λύση

Η (i) γράφεται

$$y' + \frac{2}{x}y = x,$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int xe^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right) = e^{-2\ln x}\left(\int xe^{2\ln x}dx + c\right) \\ &= e^{\ln x^{-2}}\left(\int xe^{\ln x^2}dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int x\,x^2dx + c\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^4}{4} + c\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.9 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής*

$$y' = x + xy, \quad y(0) = 1. \tag{i}$$

Λύση

Η (i) γράφεται ως

$$y' - xy = x.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$y(x) = e^{-\int -xdx}\left(\int xe^{\int -xdx}dx + c\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + c\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right) = ce^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Επειδή $y(0) = 1$,

$$y(0) = ce^0 - 1 \Leftrightarrow 1 = c - 1 \Leftrightarrow c = 2,$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Παράδειγμα 1.10 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής*

$$y'(x^2 + 1) - 4xy = x, \quad y(0) = 1. \tag{i}$$

Λύση

Η (i) γράφεται ως

$$y'(x) - \frac{4x}{x^2 + 1}y = \frac{x}{x^2 + 1},$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int -\frac{4x}{x^2+1}dx}\left(\int \frac{x}{x^2+1}e^{\int -\frac{4x}{x^2+1}dx}dx+c\right)\\
&= e^{\ln(x^2+1)^2}\left(\int \frac{x}{x^2+1}e^{\ln(x^2+1)^{-2}}dx+c\right)\\
&= (x^2+1)^2\left(-\int \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx+c\right)\\
&= (x^2+1)^2\left(-\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx+c\right)\\
&= (x^2+1)^2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}+c\right)=c(x^2+1)^2+\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Επειδή $y(0)=1$,

$$y(0)=c(0^2+1)^2+\frac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ 1=c+\frac{1}{4} \ \Leftrightarrow\ c=\frac{3}{4},$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$y(x)=\frac{3}{4}(x^2+1)^2+\frac{1}{4}.$$

1.4.1 Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής

$$y'+g(x)y=f(x)y^n \tag{1.9}$$

και μετασχηματίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με την παρακάτω διαδικασία. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1.9) επί y^{-n} προκύπτει

$$y'y^{-n}+g(x)y^{1-n}=f(x), \tag{i}$$

Θέτοντας

$$u(x)=y^{1-n} \tag{ii}$$

$$u'(x)=(1-n)y^{-n}y'(x),$$

οπότε η (i) γίνεται

$$\frac{u'(x)}{1-n}+g(x)u(x)=f(x) \ \Leftrightarrow\ u'(x)+(1-n)g(x)u(x)=(1-n)f(x).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική, οπότε λύνοντάς τη βρίσκουμε τη συνάρτηση $u(x)$ και στη συνέχεια από την (ii) βρίσκουμε τη ζητούμενη συνάρτηση $y(x)$.

Παράδειγμα 1.11 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y'=\frac{3}{x}y+x^4\sqrt[3]{y}. \tag{i}$$

Λύση

Η (i) γράφεται,

$$y'-\frac{3}{x}y=x^4y^{\frac{1}{3}}, \tag{ii}$$

οπότε είναι της μορφής (1.9), δηλαδή διαφορική εξίσωση Bernoulli με $n=\frac{1}{3}$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (ii) επί $y^{-\frac{1}{3}}$ προκύπτει

$$y'y^{-\frac{1}{3}}-\frac{3}{x}y^{-\frac{2}{3}}=x^4, \tag{iii}$$

οπότε, θέτοντας

$$u(x)=y^{1-\frac{1}{3}}=y^{\frac{2}{3}}, \tag{iv}$$

$$u'(x)=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'(x),$$

οπότε η (iii) γίνεται
$$u'(x) - \frac{2}{x}u(x) = \frac{2}{3}x^4.$$
Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, η γενική λύση της είναι
$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{2}{3}x^4 e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + c\right) \\ &= e^{\ln x^2}\left(\int \frac{2}{3}x^4 e^{\ln x^{-2}}dx + c\right) \\ &= x^2\left(\int \frac{2}{3}x^2 dx + c\right) \\ &= x^2\left(\frac{2}{9}x^3 + c\right) \\ &= \frac{2}{9}x^5 + cx^2, \end{aligned}$$
οπότε, λόγω της (iv),
$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}x^5 + cx^2 \Leftrightarrow y = \left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1.4.2 Διαφορικές εξισώσεις Riccati

Οι διαφορικές εξισώσεις Riccati είναι της μορφής
$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) = 0. \tag{1.10}$$
Αν γνωρίζουμε μία μερική τους λύση $y_1(x)$, τότε μετασχηματίζονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με τη βοήθεια της αντικατάστασης
$$y(x) + y_1(x) + \frac{1}{u(x)}, \tag{1.11}$$
όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.12 *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*
$$y' + \frac{1-x}{2x^2}y^2 - \frac{y}{x} + \frac{x-1}{2} = 0, \tag{i}$$
η οποία έχει μερική λύση την $y_1(x) = x.$

Λύση

Θέτοντας
$$y(x) = x + \frac{1}{u(x)}, \tag{ii}$$
$$y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)},$$
οπότε η (i) γίνεται
$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0$$
ή
$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{x}\frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2}\frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0$$
ή, μετά από λίγες πράξεις,
$$u' + u = \frac{1-x}{2x^2}.$$
Αυτή είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, είναι
$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int dx}\left(\int \frac{1-x}{2x^2}e^{\int dx}dx + c\right) = e^{-x}\left(\int \frac{1-x}{2x^2}e^x dx + c\right) = e^{-x}\left(\int \left(-\frac{e^x}{2x}\right)' dx + c\right) \\ &= e^{-x}\left(-\frac{e^x}{2x} + c\right) = -\frac{1}{2x} + ce^{-x}, \end{aligned}$$

Έτσι, από την (iii) προκύπτει

$$z = \int \left[-\frac{1}{2} + c(x+1)^2 \right] dx = -\frac{x}{2} + c_1(x+1)^3 + c_2, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές},$$

οπότε, σύμφωνα με την (ii), η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = xz = x(x+1)\ln(x+1) - x(x+1) + c_1 x^2 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}.$$

2.4 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης και ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{2.3}$$

όπου $a_1, a_2, \cdots, a_n$ πραγματικές σταθερές.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της (2.3) είναι της μορφής

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_\mu(x)$$

όπου $y_{o\mu}(x)$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{(n-1)} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{2.4}$$

και $y_\mu(x)$ μία μερική λύση της (2.3).

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στις ταλαντώσεις (βλ. Ενότητα 2.5.1.), έναν σημαντικό κλάδο της Μηχανικής, στα ηλεκτρικά κυκλώματα (βλ. Ενότητα 2.5.2) καθώς και στις τηλεπικοινωνίες.

Στην πρώτη ενότητα ασχολούμαστε για απλότητα με ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης και στη δεύτερη με τις αντίστοιχες μη ομογενείς, ενώ στην τρίτη και τέταρτη γενικεύουμε τις μεθόδους των δύο πρώτων ενοτήτων για τη λύση ομογενών και μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές ανώτερης τάξης.

2.4.1 Ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Στην ενότητα αυτή δίνουμε το τρόπο λύσης των ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης, δηλαδή διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$a y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0, \quad a, \beta, \gamma \in R \quad \text{σταθερές}, \tag{2.5}$$

των οποίων η γενική λύση βρίσκεται με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 2.2 *Η γενική λύση μίας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές (2.5) προκύπτει ως εξής:*

- *Λύνουμε την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση*

$$a\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

- *Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1 και ρ_2, τότε η γενική λύση της (i) είναι*

$$y(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}.$$

- *Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα ρ, τότε η γενική λύση της (i) είναι*

$$y(x) = e^{\rho x}(c_1 + c_2 x).$$

- *Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $k \pm mi$, τότε η γενική λύση της (i) είναι*

$$y(x) = e^{kx}(c_1 \cos mx + c_2 \sin mx).$$

Παράδειγμα 2.10 *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:*
α) $y'' - y' = 2y$ *β)* $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Λύση
α) Η διαφορική αυτή εξίσωση γράφεται

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

οπότε η χαρακτηριστική εξίσωσή της είναι

$$\rho^2 - \rho - 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

β) Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\rho^2 + 2\rho + 5 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho = -1 \pm 2i$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της είναι

$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right).$$

Παράδειγμα 2.11 *Να βρεθούν οι λύσεις των προβλημάτων αρχικής τιμής:*
α) $y'' + 6y' + 9y = 0$, *με* $y(0) = 0$ *και* $y'(0) = 2$.
β) $y'' = -9y$, *με* $y(0) = 0$ *και* $y'(0) = 1$.

Λύση
α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$\rho^2 + 6\rho + 9 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη διπλή πραγματική ρίζα $\rho = -3$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της είναι

$$y = e^{-3x}(c_1 + c_2 x). \tag{i}$$

Επειδή $y(0) = 0$, η (i) δίνει

$$0 = e^{-3\cdot 0}(c_1 + c_2 \cdot 0) \iff c_1 = 0.$$

Από την (i) επίσης προκύπτει

$$y' = -3e^{-3x}(c_1 + c_2 x) + e^{-3x} c_2,$$

οπότε, επειδή $y'(0) = 2$,

$$2 = -3e^{-3\cdot 0}(0 + c_2 \cdot 0) + e^{-3\cdot 0} c_2 \iff c_2 = 2.$$

Άρα, από τη γενική λύση (i) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y(x) = 2xe^{-3x}.$$

β) Η διαφορική αυτή εξίσωση γράφεται

$$y'' + 9y = 0,$$

οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση της είναι

$$\rho^2 + 9 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho = \pm 3i$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3, η γενική λύση της είναι

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Επειδή $y(0) = 0$, η (i) δίνει

$$0 = c_1 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0 \iff c_1 = 0.$$

και $$y' = -3\sin 3x + 3c_2\cos 3x,$$
οπότε, επειδή $y'(0) = 1$,
$$1 = -3\sin 3\cdot 0 + 3c_2\cos 3\cdot 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{3}.$$
Άρα, από τη γενική λύση (i) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι
$$y(x) = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

2.4.2 Μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η λύση μίας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης (ή ανώτερης τάξης) με σταθερούς συντελεστές (2.3) γίνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.3, σύμφωνα με την οποία
$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu}(x),$$
όπου $y_{o\mu}(x)$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και $y_{\mu}(x)$ μία μερική λύση της (2.3). Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να βρούμε μία μερική λύση της (2.3).

Μέθοδος προσδιορισμού των σταθερών

Με τη βοήθεια των επόμενων δύο παρατήρησεων (2.6 και 2.7) μπορούμε να βρούμε μία μερική λύση μίας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης, δηλαδή μίας διαφορικής εξίσωσης της μορφής
$$ay''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = f(x), \quad a, \beta, \gamma \in R \quad \text{σταθερές}, \tag{2.6}$$
σε ορισμένες ειδικές μορφές της συνάρτησης του δεύτερου μέλους $f(x)$, οπότε στη συνέχεια μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση τους με τη βοήθεια του Θεωρήματος 2.3.

Παρατήρηση 2.6 *Αν το δεύτερο μέλος της (2.6) είναι της μορφής*
$$f(x) = P_n(x)e^{kx},$$
όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n:

- *Αν ο πραγματικός αριθμός $z = k$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της (2.6), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής*
$$y_{\mu}(x) = Q_n(x)e^{kx},$$
όπου $Q_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού n, του οποίου οι συντελεστές προσδιορίζονται αντικαθιστώντας αυτό και τις παραγώγους του στην (2.6).
- *Αν ο k είναι ρίζα πολλαπλότητας q της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής*
$$y_{\mu}(x) = x^q Q_n(x)e^{kx}.$$

Παράδειγμα 2.12 *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων:*

α) $y'' + y' - 2y = e^{3x}$ *β)* $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ *γ)* $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

Λύση

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής
$$y = y_{o\mu} + y_{\mu} \tag{i}$$
όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης
$$y'' + y' - 2y = 0. \tag{ii}$$
Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι
$$\rho^2 + \rho - 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 = -2$ και $\rho_2 = 1$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}.$$

Το δεύτερο μέλος e^{3x} της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.6 με $k = 3$ και $n = 0$ και το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^{3x}, \quad a \text{ σταθερά.} \tag{i}$$

Η (i) δίνει $$y'_\mu = 3ae^{3x} \quad \text{και} \quad y''_\mu = 9ae^{3x},$$

οπότε αντικαθιστώντας στη διαφορική αυτή εξίσωση προκύπτει

$$9ae^{3x} + 3ae^{3x} - 2ae^{3x} = e^{3x}$$

ή, διαιρώντας δια e^{3x} (το οποίο δεν γίνεται μηδέν για κανένα x),

$$9a + 3a - 2a = 1 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{10},$$

οπότε η ζητούμενη μερική λύση είναι $$y_\mu = \frac{1}{10}e^{3x}$$

και από την (i) προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{10}e^{3x}.$$

β) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu, \tag{i}$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{ii}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι

$$\rho^2 - 3\rho + 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}.$$

Το δεύτερο μέλος xe^{2x} της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.6 με $k = 2$ και $n = 1$ και ο αριθμός $z = 2$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(ax + \beta)e^{2x} = (ax^2 + \beta x)e^{2x}, \quad a, \beta \text{ σταθερές.} \tag{iii}$$

Από την (iii) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= (2ax + \beta)e^{2x} + 2(ax^2 + \beta x)e^{2x} = \left[2ax^2 + 2(a+\beta)x + \beta\right]e^{2x} \\ y''_\mu &= \left[4ax + 2(a+\beta)\right]e^{2x} + \left[2ax^2 + 2(a+\beta)x + \beta\right]2e^{2x} \\ &= \left[4ax^2 + 4(2a+\beta)x + 2a + 4\beta\right]e^{2x}, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$\left[4ax^2 + 4(2a+\beta)x + 2(a+\beta)\right]e^{2x} - 3\left[2ax^2 + 2(a+\beta)x + \beta\right]e^{2x} + 2(ax^2 + \beta x)e^{2x} = xe^{2x}$$

ή, διαιρώντας δια e^{2x} (το οποίο δεν γίνεται μηδέν για κανένα x),

$$4ax^2 + 4(2a+\beta)x + 2a + 4\beta - 6ax^2 - 6(a+\beta)x - 3\beta + 2ax^2 + 2\beta x = x$$

ή $$2ax + 2a + \beta = x$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε $x \in R$ πρέπει

$$2a = 1 \;\text{ και }\; 2a + \beta = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{2} \;\text{ και }\; \beta = -1,$$

οπότε από την (iii) προκύπτει

$$y_\mu = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x}$$

και από την (i)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x}$$

γ) Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση

$$y'' - 4y' + 5y = 0. \qquad (i)$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\rho^2 - 4\rho + 5 = 0.$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho = 2 \pm i$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της είναι

$$y_{o\mu} = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right).$$

Το δεύτερο μέλος e^{-x} της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.6 με $k = -1$ και $n = 0$ και το -1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^{-x}, \quad a \text{ σταθερά.} \qquad (ii)$$

Η (ii) δίνει $\quad y'_\mu = -ae^{-x}$ και $y''_\mu = ae^{-x}$,

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$ae^{-x} - 4(-ae^{-x}) + 5ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow a + 4a + 5a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

Άρα, η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{1}{10}e^{-x}$$

Έτσι, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$y = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) + \frac{1}{10}e^{-x}.$$

Παράδειγμα 2.13 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής*

$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 2\,.$$

Λύση

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \qquad (i)$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad (ii)$$

της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\rho^2 - 4\rho + 4 = 0,$$

που έχει διπλή ρίζα το 2, οπότε η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}.$$

Το δεύτερο μέλος e^x της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρηση 2.6 και ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^x, \quad a \text{ σταθερά.} \qquad (iii)$$

Από την (ii) προκύπτει ότι

$$y'_\mu = ae^x \quad \text{και} \quad y''_\mu = ae^x,$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$ae^x - 4ae^x + 4ae^x = e^x \Leftrightarrow ae^x = e^x \Leftrightarrow a = 1$$

Άρα, η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = e^x.$$

και η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^x. \tag{iv}$$

Επειδή $y(0) = 0$, η (iv) δίνει

$$0 = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^{2\cdot 0} + e^0 \iff c_1 = -1.$$

Από την (iv) προκύπτει

$$y' = 2(c_1 + c_2 x)e^{2x} + c_2 e^{2x} + e^x \iff y' = (2c_1 + c_2 + 2c_2 x)\, e^{2x} + e^x. \tag{v}$$

Επειδή $y'(0) = 2$, η (v) δίνει ($c_1 = -1$)

$$2 = (-2 + c_2 + c_2 \cdot 0)\, e^{2\cdot 0} + e^0 \iff c_2 = 3,$$

οπότε από την (iv) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης που ικανοποιεί τις δεδομένες οριακές συνθήκες είναι

$$y = (-1 + 3x)e^{2x} + e^x.$$

Παρατήρηση 2.7 *Αν το δεύτερο μέλος της (2.3) είναι της μορφής*

$$f(x) = e^{kx}\,(P_1 \cos mx + P_2 \sin mx)\,,$$

όπου $P_1(x)$ και $P_2(x)$ πολυώνυμα βαθμών n_1 και n_2:

▸ *Αν ο μιγαδικός αριθμός $k + mi$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της (2.3), τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής*

$$y_\mu(x) = e^{kx}\,(Q_n(x)\cos mx + R_n(x)\sin mx),$$

όπου $Q_n(x)$ και $R_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n, όπου n ο μέγιστος των n_1 και n_2, των οποίων οι συντελεστές προσδιορίζονται αντικαθιστώντας αυτά και τις παραγώγους τους στην (2.3).

▸ *Αν το $k + mi$ είναι ρίζα πολλαπλότητας q της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε ζητούμε μερική λύση της μορφής*

$$y_\mu(x) = x^q e^{kx}\,(Q_n(x)\cos mx + R_n(x)\sin mx).$$

Παράδειγμα 2.14 *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων:*

α) $y'' - 4y' + 5y = \sin 3x$ *β)* $y'' - 4y' + 5y = e^x \cos x$ *γ)* $y'' + y = x\cos x$.

Λύση

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \tag{i}$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 5y = 0. \tag{ii}$$

Στο Παράδειγμα 2.12γ δείχνουμε ότι η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu} = e^{2x}(c_1 \cos + c_2 \sin x).$$

Το δεύτερο μέλος ($\sin 3x$) της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.7 με $k = 0, m = 3$ και $n = 0$ και το

$$k + mi = 0 + 3i = 3i$$

δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.7, ζητούμε μερική λύση της μορφής (πολυώνυμα μηδενικού βαθμού είναι οι σταθερές)

$$y_\mu = a \sin 3x + \beta \cos 3x, \quad a, \beta \text{ σταθερές}. \tag{iii}$$

Από την (iii) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= (a\sin 3x + \beta\cos 3x)' = 3a\cos 3x - 3\beta\sin 3x \\ y''_\mu &= (3a\cos 3x - 3\beta\sin 3x)' = -9a\sin 3x - 9\beta\cos 3x. \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$-9a\sin 3x - 9\beta\cos 3x - 4(3a\cos 3x - 3\beta\sin 3x) + 5(a\sin 3x + \beta\cos 3x) = \sin 3x$$

ή

$$(-4a + 12\beta)\sin 3x + (-12a - 4\beta)\cos 3x = \sin 3x.$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε $x \in R$ πρέπει

$$-4a + 12\beta = 1 \quad \text{και} \quad -12a - 4\beta = 0.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$a = -\frac{1}{40} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{3}{40},$$

οπότε από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = -\frac{1}{40}\sin 3x + \frac{3}{40}\cos 3x$$

και από την (i) προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$y = e^{2x}(c_1\cos + c_2\sin x) - \frac{1}{40}\sin 3x + \frac{3}{40}\cos 3x.$$

β) Το δεύτερο μέλος ($e^x\cos x$) της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.7 με $k = 1, m = 1$ και $n = 0$ και το

$$k + mi = 1 + i$$

δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής της εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.7, ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = e^x(a\sin x + \beta\cos x), \quad a, \beta \text{ σταθερές.} \qquad (i)$$

Από την (i) προκύπτει

$$\begin{aligned} y'_\mu &= e^x(a\sin x + \beta\cos x) + e^x(a\cos x - \beta\sin x) = e^x\left[(a-\beta)\sin x + (a+\beta)\cos x\right] \\ y''_\mu &= e^x\left[(a-\beta)\sin x + (a+\beta)\cos x\right] + e^x\left[(a-\beta)\cos x - (a+\beta)\sin x\right] = e^x(-2\beta\sin x + 2a\cos x), \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$e^x(-2\beta\sin x + 2a\cos x) - 4e^x\left[(a-\beta)\sin x + (a+\beta)\cos x\right] + 5e^x(a\sin x + \beta\cos x) = e^x\cos x$$

ή, διαιρώντας δια e^x (το οποίο δεν γίνεται μηδέν για κανένα x),

$$-2\beta\sin x + 2a\cos x - 4\left[(a-\beta)\sin x + (a+\beta)\cos x\right] + 5(a\sin x + \beta\cos x) = \cos x$$

ή

$$(a + 2\beta)\sin x + (-2a + \beta)\cos x = \cos x$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε $x \in R$ πρέπει

$$a + 2\beta = 0 \quad \text{και} \quad -2a + \beta = 1.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$a = -\frac{2}{5} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{5},$$

οπότε η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = e^x\left(-\frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x\right).$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι (η αντίστοιχη ομογενής είναι αυτή του ερωτήματος (a))

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^x\left(-\frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x\right).$$

γ) Εύκολα προκύπτει ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y = 0 \qquad (i)$$

είναι (οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\pm i$)

$$y_{o\mu} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Το δεύτερο μέλος ($x \cos x$) της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής της Παρατήρησης 2.7 με $k = 0, m = 1$ και $n = 1$ και το

$$k + mi = 0 + i$$

είναι απλή ρίζα (πολλαπλότητος 1) της χαρακτηριστικής της εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.7, ζητούμε μερική λύση της μορφής (πολυώνυμα μηδενικού βαθμού είναι οι σταθερές)

$$y_\mu = x\left[(a + \beta x)\cos x + (\gamma + \delta x)\sin x\right], \quad a, \beta, \gamma, \delta \text{ σταθερές.} \qquad (ii)$$

Από την (ii) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= \left[\delta x^2 + (2\beta + \gamma)x + a\right]\cos x + \left[-\beta x^2 + (2\delta - a)x + \gamma\right]\sin x \\ y''_\mu &= \left[-\beta x^2 + (4\delta - a)x + 2(\beta + \gamma)\right]\cos x + \left[-\delta x^2 + (-4\beta - \gamma)x + 2(\delta - a)\right]\sin x. \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοσμένη διαφορική εξίσωση προκύπτει (μετά από λίγες πράξεις)

$$2(\beta + \gamma)\cos x + 2(\delta - a)\sin x - 4\beta x \sin x + 4\delta x \cos x = x \cos x$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε $x \in R$ πρέπει

$$\beta + \gamma = 0, \quad \delta - a = 0, \quad \beta = 0 \text{ και } \quad 4\delta = 1.$$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει

$$a = \frac{1}{4}, \quad \beta = \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \delta = \frac{1}{4},$$

οπότε από την (ii) προκύπτει η ζητούμενη μερική λύση

$$y_\mu = \frac{1}{4}x^2 \sin x + \frac{1}{4}x \cos x.$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$y(x) = y_{o\mu} + y_\mu = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{4}x^2 \sin x + \frac{1}{4}x \cos x.$$

Παρατήρηση 2.8 *Αν το δεύτερο μέλος της (2.3) είναι άθροισμα όρων της μορφής των Παρατήρησεων 2.6 και 2.7, τότε ζητούμε λύση αθροίσματος των αντίστοιχων μερικών λύσεων, όπως στο επόμενο παράδειγμα.*

Παράδειγμα 2.15 *Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων:*

α) $y'' + 9y = e^x - 1$ *β)* $y'' + y' = \sin x + 2$ *γ)* $y'' + y = 2e^x - 3e^{-2x}$

δ) $y'' - 4y = 10\sin x - 8\sin 2x$ *ε)* $y'' + y' = e^{-x} - \cos x$

Λύση

α) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \qquad (i)$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 9y = 0. \qquad (ii)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι

$$\rho^2 + 9 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho = \pm 3i$, ς οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Το δεύτερο μέλος ($e^x - 1$) της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι άθροισμα των

$$e^x \text{ και } -1$$

και οι αριθμοί 1 και 0 δεν είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.8 και 2.6, ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^x + \beta, \quad a, \beta \text{ σταθερές.} \tag{iii}$$

Η (iii) δίνει
$$y'_\mu = ae^x \quad \text{και} \quad y''_\mu = ae^x,$$
οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$ae^x + 9(ae^x + \beta) = e^x - 1.$$

ή
$$10ae^x + 9\beta = e^x - 1,$$
οπότε
$$10a = 1 \quad \text{και} \quad 9\beta = -1 \quad \text{ή} \quad a = \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad \beta = -\frac{1}{9}.$$
Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{9}$$

και από την (i) ότι η γενική λύση είναι

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{9}.$$

β) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \tag{i}$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y' = 0. \tag{ii}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι

$$\rho^2 + \rho = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο απλές πραγματικές ρίζες $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = -1$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu}(x) = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Το δεύτερο μέλος ($\sin x + 2$) της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι άθροισμα των

$$\sin x \text{ και } 2.$$

Το i δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης ενώ το 0 είναι, οπότε, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.8 και 2.6, ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a \sin x + \beta \cos x + \gamma x, \quad a, \beta, \gamma \text{ σταθερές.} \tag{iii}$$

Από την (iii) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= a \cos x - \beta \sin x + \gamma \\ y''_\mu &= -a \sin x - \beta \cos x, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$-a \sin x - \beta \cos x + a \cos x - \beta \sin x + \gamma = \sin x + 2$$

ή
$$(-a - \beta) \sin x + (a - \beta) \cos x + \gamma = \sin x + 2,$$
Άρα,
$$-a - \beta = 1, \quad a - \beta = 0 \quad \text{και} \quad \gamma = 2 \quad \text{ή} \quad a = \beta = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \gamma = 2.$$
Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + 2x$$

και από την (i) ότι η γενική λύση είναι

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + 2x.$$

γ) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \qquad (i)$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y = 0. \qquad (ii)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι

$$\rho^2 + 1 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho = \pm i$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση **2.2**, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu}(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Το δεύτερο μέλος $(2e^x - 3e^{-2x})$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι άθροισμα των $2e^x$ και $-3e^{-2x}$. Το 1 και το -2 δεν είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις **2.8** και **2.7**, ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^x + \beta e^{-2x}, \quad a, \beta \text{ σταθερές.} \qquad (iii)$$

Από την (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= ae^x - 2\beta e^{-2x} \\ y''_\mu &= ae^x + 4\beta e^{-2x}, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$ae^x + 4\beta e^{-2x} + ae^x + \beta e^{-2x} = 2e^x - 3e^{-2x} \iff 2ae^x + 5\beta e^{-2x} = 2e^x - 3e^{-2x},$$

Άρα, $$2a = 2 \iff a = 1, \quad \text{και} \quad 5\beta = -3 \iff \beta = -\frac{3}{5}.$$

Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$y_\mu = e^x - \frac{3}{5}e^{-2x}$$

και από την (i) ότι η γενική λύση είναι

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + e^x - \frac{3}{5}e^{-2x}.$$

δ) Σύμφωνα με το Θεώρημα **2.3**, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής

$$y = y_{o\mu} + y_\mu \qquad (i)$$

όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y = 0. \qquad (ii)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (ii) είναι

$$\rho^2 - 4 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τις δύο απλές πραγματικές ρίζες

$$\rho = \pm 2,$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση **2.2**, η γενική λύση της (ii) είναι

$$y_{o\mu}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Το δεύτερο μέλος $(10 \sin x - 8 \sin 2x)$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι άθροισμα των

$$10 \sin x \text{ και } -8 \sin 2x$$

και το i και το $2i$ δεν είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις **2.8** και **2.7**, ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a \sin x + \beta \cos x + \gamma \sin 2x + \delta \cos 2x, \quad a, \beta, \gamma, \delta \text{ σταθερές.} \qquad (iii)$$

Από την (iii) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y'_\mu &= a \cos x - \beta \sin x + 2\gamma \cos 2x - 2\delta \sin 2x \\ y''_\mu &= -a \sin x - \beta \cos x - 4\gamma \sin 2x - 4\delta \cos 2x, \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει

$$-a\sin x - \beta\cos x - 4\gamma\sin 2x - 4\delta\cos 2x - 4(a\sin x + \beta\cos x + \gamma\sin 2x$$
$$+\delta\cos 2x) = 10\sin x - 8\sin 2x$$

ή
$$-5a\sin x - 5\beta\cos x - 8\gamma\sin 2x - 8\delta\cos 2x = 10\sin x - 8\sin 2x,$$

οπότε
$$-5a = 10, \quad -5\beta = 0, \quad -8\gamma = -8, \quad -8\delta = 0$$

ή
$$a = -2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1 \quad \text{και} \quad \delta = 0.$$

Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι
$$y_\mu = -2\sin x + \sin 2x$$
και από την (i) ότι η γενική λύση είναι
$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 2\sin x + \sin 2x.$$

ε) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3, η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής
$$y = y_{o\mu} + y_\mu \tag{i}$$
όπου $y_{o\mu}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης
$$y'' + y' = 0. \tag{ii}$$
Σύμφωνα με τη λύση του (β), η γενική λύση της (ii) είναι
$$y_{o\mu}(x) = c_1 + c_2 e^{-x}.$$
Το δεύτερο μέλος $(e^{-x} - \cos x)$ της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι άθροισμα των
$$e^{-x} \text{ και } -\cos x.$$
Το -1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης ενώ το i δεν είναι, οπότε, σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 2.8 και 2.7, ζητούμε μερική λύση της μορφής
$$y_\mu = axe^{-x} + \beta\sin x + \gamma\cos x, \quad a, \beta, \gamma \text{ σταθερές.} \tag{iii}$$
Από την (iii) προκύπτει ότι
$$\begin{aligned} y'_\mu &= ae^{-x} - axe^{-x} + \beta\cos x - \gamma\sin x \\ y''_\mu &= -2ae^{-x} + axe^{-x} - \beta\sin x - \gamma\cos x, \end{aligned}$$
οπότε αντικαθιστώντας στη δοθείσα διαφορική εξίσωση προκύπτει
$$-2ae^{-x} + axe^{-x} - \beta\sin x - \gamma\cos x + ae^{-x} - axe^{-x} + \beta\cos x - \gamma\sin x = e^{-x} - \cos x$$

ή
$$-ae^{-x} + (-\beta - \gamma)\sin x + (\beta - \gamma)\cos x = e^{-x} - \cos x,$$
$$-a = 1, \quad -\beta - \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \beta - \gamma = -1,$$

ή
$$a = -1, \quad \beta = -\frac{1}{2} \text{ και } \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Έτσι, από την (iii) προκύπτει ότι η ζητούμενη μερική λύση είναι
$$y_\mu = -xe^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$
και από την (i) προκύπτει ότι η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι
$$y = c_1 + c_2 e^{-x} - xe^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x.$$

2.4.3 Μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Στην ενότητα αυτή δίνουμε μία μέθοδο για την εύρεση μίας μερικής λύσης μίας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές, των οποίων το δεύτερο μέλος δεν είναι μίας εκ των μορφών της προηγούμενης ενότητας (δεν είναι δυνατόν να βρεθεί λύση με τη μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών). Η μέθοδος αυτή είναι χρήσιμη και στη λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές με την προυπόθεση ότι γνωρίζουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.

Διαιρώντας όλους τους όρους της (2.6) με το συντελεστή της $y''(x)$, αυτή γράφεται ως