Ν. Μυλωνάς
Μαθηματικός - Φυσικός, Α.Π.Θ.

Χ. Σχοινάς
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Γαρ. Παπασχοινόπουλος
Καθηγητής Δ.Π.Θ.

Λογισμός Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

& Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

συνδεδεμένο περιεχόμενο

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ

Κεφάλαιο 4

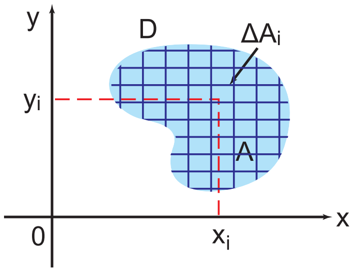
Διπλά ολοκληρώματα

4.1 Ορισμός διπλού ολοκληρώματος

Θεωρούμε μία φραγμένη συνάρτηση $f(x,y)$ σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο D του επιπέδου (υποσύνολο του R^2). Διαμερίζουμε το D σε n ορθογώνια παραλληλόγραμμα εμβαδού ΔA_i, $i = 1, 2, .., n$ και για τη διαμέριση αυτή ορίζουμε το άθροισμα

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

όπου (x_i, y_i) ένα σημείο του i–ορθογωνίου και ΔA_i το εμβαδόν του.



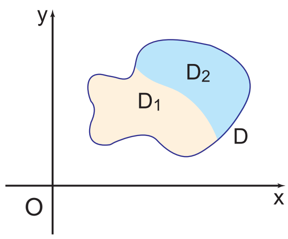
Σχήμα 4.1 *Διαμέριση του χωρίου D*

Ορισμός 4.1 *Αν το όριο του αθροίσματος αυτού ($\lim\limits_{n\to\infty} I_n$) υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός ανεξάρτητος από τον τρόπο χωρισμού του D και της επιλογής των σημείων (x_i, y_i), τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο D και η τιμή του ορίου αυτού λέγεται* ***διπλό ολοκλήρωμα*** *της f στο D και συμβολίζεται με*

$$\iint_D f(x,y)dxdy.$$

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα χωρίο D, τότε είναι και ολοκληρώσιμη στο D.



Σχήμα 4.2 *Το χωρίο D χωρίζεται στα χωρία D_1 και D_2.*

- Αν χωρίσουμε το χωρίο D ενός διπλού ολοκληρώματος σε δύο (ή περισσότερα) χωρία D_1, D_2, τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία (βλ. Σχήμα 4.2),

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \tag{4.1}$$

- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο D και $k, \lambda \in I\!R$, τότε

$$\iint_D (kf + \lambda g)dxdy = k \iint_D f dxdy + \lambda \iint_D g dxdy \tag{4.2}$$

Πρόταση 4.1 *Από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος προκύπτει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου D του επιπέδου είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = 1$ στο D*

$$E(D) = \iint_D dxdy. \tag{4.3}$$

Το **θεώρημα μέσης τιμής** για διπλά ολοκληρώματα είναι:

Θεώρημα 4.1 *Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο χωρίο D του επιπέδου, του οποίου το εμβαδόν είναι $E(D)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $P \in D$, τέτοιο ώστε*

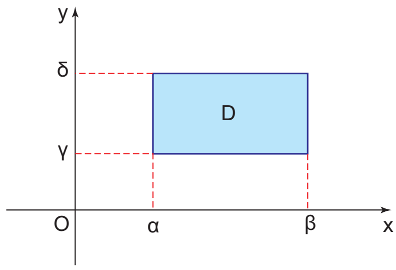
$$f(P) = \frac{\iint_D f(x,y)dxdy}{E(D)}.$$

*Την τιμή $f(P)$ τη λέμε **μέση τιμή** της f στο D και τη συμβολίζουμε με $\bar{f}$.*

4.2 Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

Ο τρόπος υπολογισμού ενός διπλού ολοκληρώματος $\iint_D f(x,y)dxdy$ καθορίζεται προτίστως από τη μορφή του χωρίου D και όχι από τη συνάρτηση f.

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε τον τρόπο υπολογισμού ενός διπλού ολοκληρώματος ανάλογα με τη μορφή του χωρίου D. Για κάθε περίπτωση ακολουθούν παραδείγματα.



Σχήμα 4.3 *Το χωρίο D είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*

Πρόταση 4.2 *Αν το χωρίο D είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες με τους άξονες (βλ. Σχήμα 4.3), δηλαδή αν*

$$D = \{(x,y) : \ a \le x \le \beta \ \text{ και } \ \gamma \le y \le \delta\},$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^\beta \left(\int_\gamma^\delta f(x,y)dy \right) dx = \int_\gamma^\delta \left(\int_a^\beta f(x,y)dx \right) dy \tag{4.4}$$

Αν, επίσης, η f είναι της μορφής

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^\beta f_1(x)dx \int_\gamma^\delta f_2(y)dy \tag{4.5}$$

Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\int_a^\beta f(x,y)dy$ το x νοείται ως σταθερά, ενώ στο $\int_a^\beta f(x,y)dx$ το y νοείται ως σταθερά.

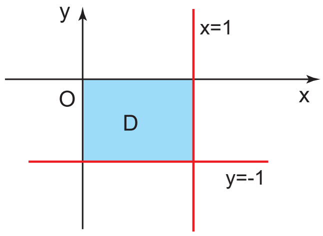
Παράδειγμα 4.1 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \iint_D (x - 2y)dxdy,$$

όπου D *το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες*

$$x = 1,\ y = -1 \ \text{ και τους άξονες.}$$

Λύση



Σχήμα 4.36 *Το χωρίο* D *είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*

Από το Σχήμα 4.36 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$$D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1 \ \text{ και } \ -1 \le y \le 0\},$$

οπότε, σύμφωνα με την (4.4),

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 (x - 2y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy - y^2\right]_{-1}^0 dx \\ &= \int_0^1 \left((x \cdot 0 - 0^2) - (x(-1) - (-1)^2) \right) dx = \int_0^1 (x+1)dx = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

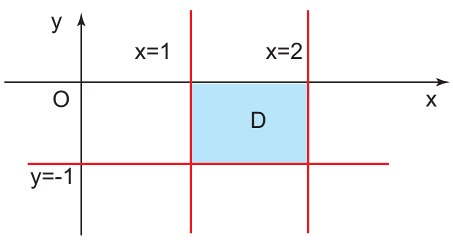
Παράδειγμα 4.2 *Να υπολογιστεί το*

$$\iint_D x^2 y dxdy,$$

όπου D *το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες*

$$x = 1,\ x = 2,\ y = -1 \ \text{ και τον άξονα } x.$$

Λύση



Σχήμα 4.4 *Το χωρίο* D *είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*

Από το Σχήμα 4.4 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

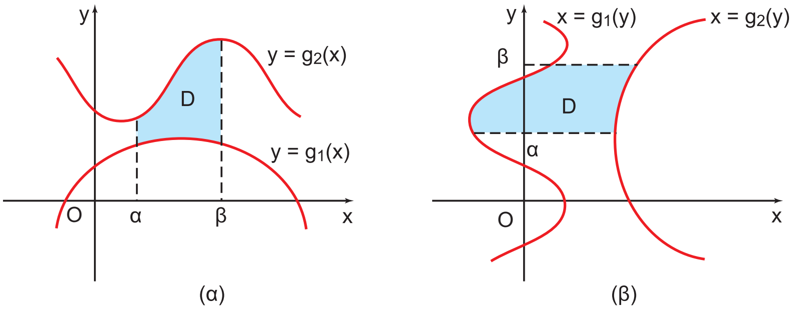
$$D = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2 \ \text{ και } \ -1 \le y \le 0\},$$

οπότε, σύμφωνα με την (4.5),

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_1^2 x^2 dx \int_{-1}^0 y dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^0 = -\frac{7}{6}.$$

■

Σε πολλές περιπτώσεις ο υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος γίνεται με τη βοήθεια της επόμενης πρότασης:



Σχήμα 4.5 *Το χωρίο D είναι απλό: α) ως προς y, β) ως προς x.*

Πρόταση 4.3 .

▸ *Αν το χωρίο D είναι απλό ως προς y, δηλαδή αν περικλείεται κάτω από τη γραμμή $y = g_1(x)$, πάνω από την $y = g_2(x)$ (όπου g_1 και g_2 δύο συνεχείς συναρτήσεις), αριστερά από την ευθεία $x = a$ και δεξιά από την $x = \beta$ (βλ. Σχήμα 4.5α), δηλαδή αν είναι της μορφής*

$$D = \{(x, y) : \ a \le x \le \beta \ \text{ και } \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^\beta \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx. \tag{4.6}$$

▸ *Αν το χωρίο D είναι απλό ως προς x, δηλαδή αν περικλείεται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = a$ πάνω από την $y = \beta$, αριστερά από τη γραμμή $x = g_1(y)$, και δεξιά από την $x = g_2(y)$ (βλ. Σχήμα 4.5β), δηλαδή αν είναι της μορφής*

$$D = \{(x, y) : \ g_1(y) \le x \le g_2(y) \ \text{ και } \ a \le y \le \beta\},$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^\beta \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \tag{4.7}$$

▸ *Πολλά χωρία είναι ταυτόχρονα απλά και ως προς y και ως προς x, οπότε τα αντίστοιχα διπλά ολοκληρώματα υπολογίζονται είτε από την (4.6) είτε από την (4.7).*

Θυμίζουμε ότι:

- Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής $\displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ το x νοείται ως σταθερά.
- Το $\displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ είναι συνάρτηση του x.

Παράδειγμα 4.3 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D 2xydxdy,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις γραμμές

$$y = 1 + x^2, \ y = x, \ x = 1 \text{ και τον } y - \text{άξονα}.$$

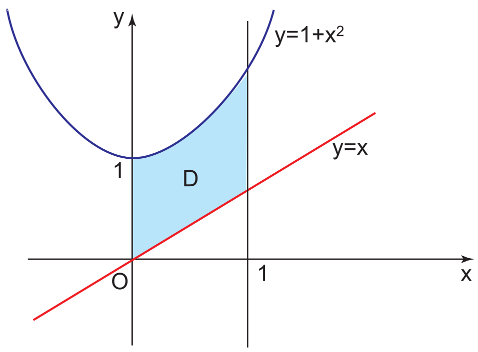
Λύση

Από το Σχήμα 4.6 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό γράφεται

$$D = \left\{(x, y) : \ 0 \le x \le 1 \ \text{ και } \ x \le y \le 1 + x^2\right\},$$

οπότε είναι απλό ως προς y. Έτσι, σύμφωνα με την (4.6)

$$\iint_D 2xydxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{1+x^2} 2xydy \right) dx = \int_0^1 x[y^2]_x^{1+x^2} dx = \int_0^1 x\left[(1+x^2)^2 - x^2\right] dx = \frac{11}{12}.$$



Σχήμα 4.6 *Το χωρίο D είναι απλό ως προς y.*

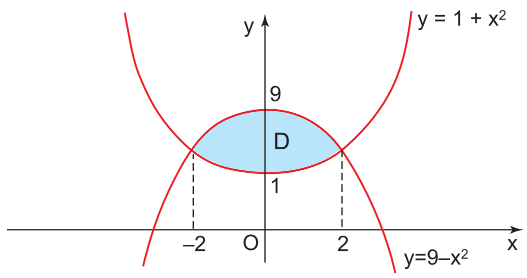
Παράδειγμα 4.4 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D xy dx dy,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις γραμμές

$$y = 1 + x^2 \quad \text{και} \quad y = 9 - x^2.$$

Λύση



Σχήμα 4.7 *Το χωρίο D είναι απλό ως προς y.*

Από το Σχήμα 4.7 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό γράφεται (τα σημεία τομής των δύο γραμμών που το περιβάλλουν προκύπτουν από το σύστημα των εξισώσεων τους να έχουν τετμημένες $x = -2$ και $x = 2$)

$$D = \left\{(x, y) : \ -2 \le x \le 2 \ \text{ και } \ 1 + x^2 \le y \le 9 - x^2\right\},$$

οπότε είναι απλό ως προς y. Έτσι σύμφωνα με την (4.6)

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_{-2}^{2}\left(\int_{1+x^2}^{9-x^2} xy dy\right) dx = \int_{-2}^{2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1+x^2}^{9-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\left(\left(9 - x^2\right)^2 - (1 + x^2)^2\right) dx = 0\end{aligned}$$

(διότι η συνάρτηση του τελευταίου ολοκληρώματος είναι περιττή και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι της μορφής $[-a, a]$).

Παράδειγμα 4.5 *Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται από τις γραμμές*

$$y^2 = x \quad \text{και} \quad y^2 = 8 - x.$$

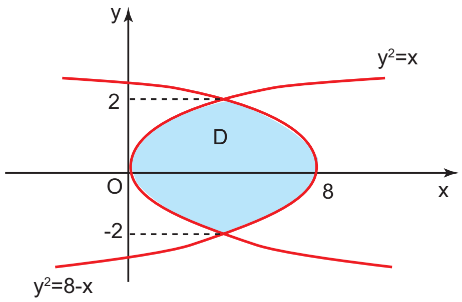
Λύση

Το εμβαδόν του χωρίου D είναι

$$E(D) = \iint_D dx dy. \tag{i}$$

Από το Σχήμα 4.8 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό γράφεται (τα σημεία τομής των δύο γραμμών που το περιβάλλουν προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων τους να έχουν τεταγμένες

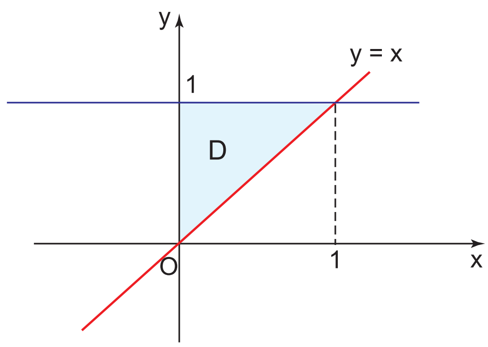
$y = -2$ και $y = 2$)
$$D = \{(x,y) : \ y^2 \le x \le 8 - y^2 \ \text{ και } \ -2 \le y \le 2\},$$
οπότε είναι απλό ως προς x. Έτσι, σύμφωνα με την (4.7), η (i) δίνει
$$E(D) = \int_{-2}^{2} \left(\int_{y^2}^{8-y^2} dx \right) dy = \int_{-2}^{2} [x]_{y^2}^{8-y^2} dy = \int_{-2}^{2} \left(8 - y^2 - y^2\right) dy = \frac{64}{3}.$$



Σχήμα 4.8 *Το χωρίο D είναι απλό ως προς x*

Παράδειγμα 4.6 *Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης*
$$f(x,y) = x + y$$
στο χωρίο D του επιπέδου που περικλείεται από τις γραμμές
$$x = y, \ y = 1 \ \text{ και τον άξονα } y$$
και να βρεθούν τα σημεία του D στα οποία η f παίρνει την τιμή αυτή.

Λύση



Σχήμα 4.9 *Το χωρίο D είναι απλό ως προς y*

Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x,y)$ στο χωρίο D είναι (βλ. Θεώρημα 4.1)
$$\bar{f} = \frac{\iint_D (x+y)dxdy}{E(D)}, \tag{i}$$
όπου $E(D)$ το εμβαδόν του D. Από το Σχήμα 4.9 φαίνεται ότι το D γράφεται
$$D = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ \ x \le y \le 1\},$$
οπότε είναι απλό ως προς y και

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - (x^2 + \frac{x^2}{2}) \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Το χωρίο D είναι τρίγωνο (βλ. Σχήμα 4.9), οπότε το εμβαδόν του είναι

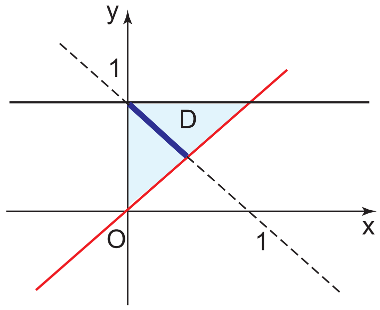
$$E(D) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Έτσι από την (i) προκύπτει
$$\bar{f} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Η f παίρνει την τιμή αυτή στα σημεία (x, y) του D για τα οποία

$$f(x, y) = 1 \iff x + y = 1,$$

δηλαδή για τα σημεία της ευθείας $x + y = 1$ που βρίσκονται μέσα στο D (βλ. Σχήμα 4.10).



Σχήμα 4.10 *Η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο D πάνω στην ευθεία $x + y = 1$.*

■

Αν το χωρίο D δεν είναι απλό ούτε ως προς x ούτε ως προς y, τότε το χωρίζουμε με κατάλληλη ευθεία (-ες) σε δύο ή περισσότερα χωρία απλά ως προς x ή προς y, στα οποία υπολογίζουμε, σύμφωνα με τα παραπάνω, το διπλό ολοκλήρωμα της f σε καθένα από αυτά και εφαρμόζουμε την (4.1).

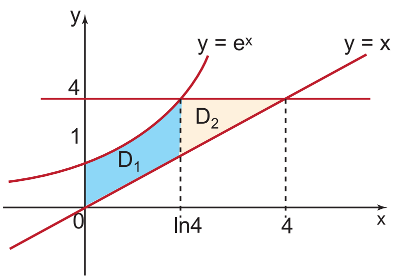
Παράδειγμα 4.7 *Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται από τις γραμμές*

$$y = e^x, \; y = x, \; y = 4 \;\; \text{και τον} \;\; y - \text{άξονα με } y < e^x.$$

Λύση

Το εμβαδόν του χωρίου D είναι

$$E(D) = \iint_D dxdy.$$



Σχήμα 4.11 *Χωρίζουμε το χωρίο D στα χωρίο D_1 και D_2.*

Από το Σχήμα 4.11 φαίνεται ότι το D δεν είναι απλό ούτε ως προς x ούτε ως προς y.

Το σημείο τομής της $y = e^x$ και της ευθείας $y = 4$ προκύπτει από την εξίσωση

$$e^x = 4 \iff x = \ln 4$$

και το σημείο τομής των ευθειών $y = x$ και $y = 4$ είναι προφανώς το $(4, 4)$.

Χωρίζουμε το χωρίο D με τη βοήθεια της κατακόρυφης ευθείας $x = \ln 4$ στα χωρία D_1 και D_2, οπότε (βλ.(4.1))

$$E(D) = E_1 + E_2 = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy \qquad (i)$$

Το D_1 περικλείεται (βλ. Σχήμα 4.11) πάνω από την $y = e^x$ και κάτω από την $y = x$ για $0 \leq x \leq \ln 4$, οπότε

$$D_1 = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq \ln 4 \ \text{ και } \ x \leq y \leq e^x\},$$

και είναι απλό ως προς y. Έτσι,

$$E_1 = \int_0^{\ln 4} \left(\int_x^{e^x} dy \right) dx = \int_0^{\ln 4} [y]_x^{e^x} dx = \int_0^{\ln 4} (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln 4} = 3 - \frac{\ln^2 4}{2}.$$

Το D_2 περικλείεται (βλ. Σχήμα 4.11) πάνω από την $y = 4$ και κάτω από την $y = x$ για $\ln 4 \leq x \leq 4$, οπότε

$$D_2 = \{(x, y) : \ \ln 4 \leq x \leq 4 \text{ και } x \leq y \leq 4\}$$

και είναι απλό ως προς y. Έτσι,

$$E_2 = \int_{\ln 4}^{4} \left(\int_x^{4} dy \right) dx = \int_{\ln 4}^{4} [y]_x^4 dx = \int_{\ln 4}^{4} (4 - x) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_{\ln 4}^{4} = 8 - 4\ln 4 + \frac{\ln^2 4}{2}.$$

Έτσι η (i) δίνει

$$E = E_1 + E_2 = 3 - \frac{\ln^2 4}{2} + 8 - 4\ln 4 + \frac{\ln^2 4}{2} = 11 - 4\ln 4.$$

Παράδειγμα 4.8 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \cos \frac{\pi x^2}{2} dx \right) dy.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

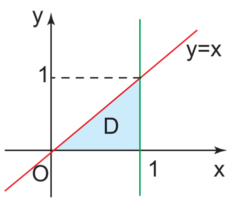
$$\int \cos \frac{\pi x^2}{2} dx.$$

Όμως το I γράφεται

$$I = \iint_D \cos \frac{\pi x^2}{2} dxdy,$$

όπου

$$D = \{(x, y) : \ y \leq x \leq 1 \ \text{ και } \ 0 \leq y \leq 1\}.$$



Σχήμα 4.12 *Το χωρίο D είναι απλό και ως προς x και ως προς y.*

Σχεδιάζουμε το χωρίο D και από το σχήμα παρατηρούμε ότι μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ και } \ 0 \leq y \leq x\}$$

(το D είναι απλό και ως προς y), οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x \cos \frac{\pi x^2}{2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\cos \frac{\pi x^2}{2} \int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 x \cos \frac{\pi x^2}{2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \cos t dt = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

■

Από τη λύση του παραδείγματος αυτού προκύπτει:

Παρατήρηση 4.1 *Αν ο άμεσος υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος της μορφής*

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \quad \text{ή} \quad \int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

είναι δύσκολος, σχεδιάζουμε το αντίστοιχο χωρίο D και αν αυτό είναι απλό και ως προς x και ως προς y, τότε αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

4.3 Αλλαγή μεταβλητών

Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος απλοποιείται πολύ ο υπολογισμός ενός διπλού ολοκληρώματος σε περιπτώσεις στις οποίες το χωρίο είναι ορθογώνιο παραλληλογραμμο ή γενικότερα απλούστερο ως προς ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 4.2 *Αν $f(x,y)$ μία συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε ένα χωρίο D του επιπέδου και D' το αντίστοιχο του D ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων u,v, για τις οποίες ισχύει*

$$x = x(u,v) \quad \text{και} \quad y = y(u,v), \tag{i}$$

τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv,$$

όπου

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

η ιακωβιανή ορίζουσα των (i).

Από το θεώρημα αυτό εύκολα προκύπτει η επόμενη παρατήρηση.

Παρατήρηση 4.2 *Αν το χωρίο D ενός διπλού ολοκληρώματος στις συντεταγμένες u και v είναι το ορθογώνιο*

$$D' = \{(u,v):\ u_1 \le u \le u_2 \ \text{ και } \ v_1 \le v \le v_2\},$$

τότε για το διπλό ολοκλήρωμα στο D κάθε συνάρτησης $f(x,y)$ ισχύει (βλ. (4.4))

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{v_1}^{v_2}\left(\int_{u_1}^{u_2} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}du\right)dv. \tag{4.8}$$

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες r,θ για τις οποίες ισχύει

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta,$$

Η ιακωβιανή ορίζουσα των σχέσεων αυτών είναι (βλ.(2.28))

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r,$$

οπότε, σύμφωνα με την (4.8):

Πρόταση 4.4 *Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f(x,y)$ ισχύει*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta, \tag{4.9}$$

όπου D' το αντίστοιχο του D χωρίο σε πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 4.9 *Να υπολογιστεί, συναρτήσει του α, το διπλό ολοκλήρωμα*

$$I = \iint_D (x+y)dxdy,$$

όπου D το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α.

Λύση

Από το Σχήμα 4.13 φαίνεται ότι, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta \ \text{ και } \ y = r\sin\theta, \tag{i}$$

το D γράφεται
$$D' = \{(r,\theta) : \ 0 \le r \le a \ \text{ και } \ 0 \le \theta \le \pi\}, \tag{ii}$$

οπότε (βλ. Σχήμα 4.13β) είναι ορθογώνιο σε πολικές συντεταγμένες και σύμφωνα με την Πρόταση 3.5,

$$\iint_D (x+y)dxdy = \iint_{D'} (r\cos\theta + r\sin\theta)rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)d\theta \int_0^a r^2 dr = 2\frac{a^3}{3}.$$

Σχήμα 4.13 *Το χωρίο D: α) σε καρτεσιανές β) σε πολικές συντεταγμένες*

■

Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα:

Παρατήρηση 4.3 *Αν το χωρίο D ενός διπλού ολοκληρώματος σε πολικές συντεταγμένες ($x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$) είναι το ορθογώνιο*

$$D' = \{(r,\theta) : \ r_1 \le r \le r_2 \ \text{ και } \ \theta_1 \le \theta \le \theta_2\},$$

τότε για το διπλό ολοκλήρωμα στο D κάθε συνάρτησης $f(x,y)$ ισχύει (βλ.(4.8))

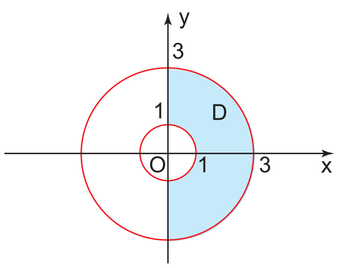
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr \right) d\theta.$$

Παράδειγμα 4.10 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,$$

όπου
$$D = \left\{(x,y) : \ 1 \le x^2+y^2 \le 9 \ \text{ και } \ x > 0\right\}.$$

Λύση



Σχήμα 4.14 *Το χωρίο D είναι ορθογώνιο σε πολικές συντεταγμένες.*

Από το Σχήμα 4.14 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$D' = \left\{(r,\theta) : \ 1 \le r \le 3 \ \text{ και } \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\},$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.3 ($x^2 + y^2 = r^2$),

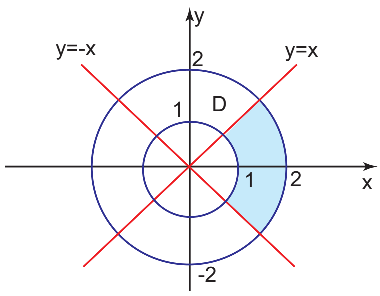
$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \ln(1 + r^2)rdr\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{10} \ln t \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{\pi}{2}(10 \ln 10 - 2 \ln 2 - 8).\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.11 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y) : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \ \textit{ και } \ -x \le y \le x\}.$

Λύση



Σχήμα 4.15 *Το χωρίο D είναι ορθογώνιο σε πολικές συντεταγμένες*

Από το Σχήμα 4.15 φαίνεται ότι το χωρίο αυτό σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$D' = \left\{(r,\theta) : \ 1 \le r \le 2 \ \text{ και } \ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\},$$

οπότε, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.3 ($x^2 + y^2 = r^2$),

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 e^{-r^2} rdr\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 e^{-r^2} rdr == \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Παράδειγμα 4.12 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D xydxdy,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τη γραμμή

$$x^2 + y^2 = 2x. \qquad (i)$$

Λύση

Η (i) γράφεται

$$x^2 + y^2 = 2x \ \Leftrightarrow \ x^2 - 2x + y^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

οπότε το D είναι το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το $K(1,0)$ και ακτίνα 1.

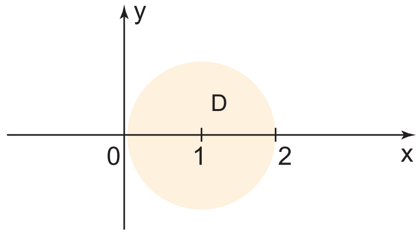
Θέτοντας $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ στην (i) προκύπτει

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2r\cos\theta \ \Leftrightarrow \ r^2 = 2r\cos\theta \ \Leftrightarrow \ r = 2\cos\theta,$$

οπότε το χωρίο αυτό σε πολικές συντεταγμένες είναι (βλ. Σχήμα 4.16)

$$D' = \left\{(r,\theta) : \ 0 \le r \le 2\cos\theta \ \text{ και } \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Επομένως (βλ. (4.9)),



Σχήμα 4.16 *Το χωρίο D είναι κύκλος με κέντρο το $K(1,0)$ και ακτίνα 1.*

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\theta\sin\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3dr\right)d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\cdot 2^4\cos^4\theta d\theta\\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta d\theta = 0\end{aligned}$$

(διότι η συνάρτηση $\cos^5\theta\sin\theta$ είναι περιττή και το διάστημα ολοκλήρωσης είναι της μορφής $[-a,a]$).

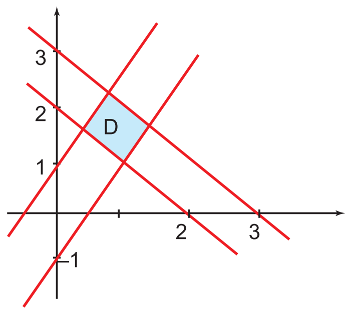
Παράδειγμα 4.13 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D ydxdy,$$

όπου D το χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες

$$2x-y=-1,\ 2x-y=1,\ x+y=2 \ \text{ και } x+y=3.$$

Λύση



Σχήμα 4.17 *Το χωρίο D δεν είναι απλό ούτε ως προς x ούτε ως προς y.*

Θέτοντας

$$u = 2x - y \ \text{ και } v = x + y,$$

το χωρίο D γράφεται

$$D' = \{(u,v):\ -1\le u\le 1 \ \text{ και } \ 2\le v\le 3\}, \qquad (i)$$

οπότε ο υπολογισμός του διπλού αυτού ολοκληρώματος γίνεται εύκολα με τη βοήθεια των μεταβλητών αυτών (βλ. Παρατήρηση 4.2). Λύνοντας τις (i) ως προς x και y προκύπτει

$$x = \frac{u+v}{3} \ \text{ και } \ y = \frac{2v-u}{3},$$

οπότε η ιακωβιανή ορίζουσα των σχέσεων αυτών είναι

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Επομένως (βλ. (4.8) της Παρατήρηση 4.2),

$$\begin{aligned}\iint_D y\,dxdy &= \iint_{D'} \frac{2v-u}{3}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv = \int_2^3\left(\int_{-1}^1 \frac{2v-u}{3}\frac{1}{3}du\right)dv \\ &= \frac{1}{9}\int_2^3\left(2v[u]_{-1}^1 - \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^1\right)dv = \frac{1}{9}\int_2^3 4v\,dv = \frac{10}{9}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.14 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

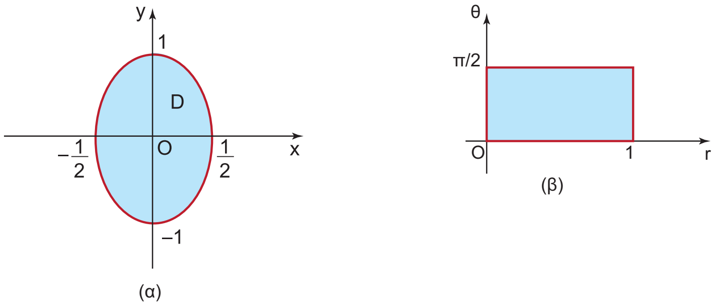
$$\iint_D xy^2 dxdy,$$

όπου $D = \{(x,y):\ 4x^2+y^2 \le 1,\ x\ge 0 \text{ και } y \ge 0\}.$

Λύση

Το χωρίο D είναι το εσωτερικό στο α' τεταρτημόριο της έλλειψης

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$



Σχήμα 4.18 *Το χωρίο D είναι ορθογώνιο σε ελλειπτικές συντεταγμένες.*

Παρατηρούμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε ελλειπτικές συντεταγμένες

$$x = \frac{1}{2}r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta, \tag{i}$$

το χωρίο D γράφεται $$D' = \left\{(r,\theta):\ 0\le r\le 1 \ \text{ και } \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\},$$

οπότε στις συντεταγμένες αυτές είναι ορθογώνιο και ο υπολογισμός του διπλού αυτού ολοκληρώματος γίνεται εύκολος. Η ιακωβιανή ορίζουσα των (i) είναι

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \frac{1}{2}r,$$

οπότε (βλ. Παρατήρηση 4.2)

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}r\cos\theta(r\sin\theta)^2\frac{1}{2}rdr\right)d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^4dr = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.15 *Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα*

$$\iint_D x\,dxdy$$

όπου D το χωρίο που περιβάλλεται από τις γραμμές του επιπέδου xy

$$x(1-y)=1,\ x(1-y)=2,\ xy=1 \quad \text{και} \quad xy=3. \tag{i}$$

Λύση

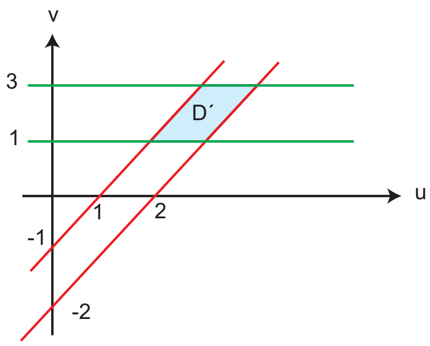
Θέτοντας $$u = x \quad \text{και} \quad v = xy$$

οι (i) γίνονται

$$x(1-y)=1 \Leftrightarrow x=1+xy \Leftrightarrow u=1+v$$
$$x(1-y)=2 \Leftrightarrow x=2+xy \Leftrightarrow u=2+v$$
$$xy=1 \Leftrightarrow v=1 \quad \text{και} \quad xy=3 \Leftrightarrow v=3$$

οπότε το χωρίο D' του διπλού αυτού ολοκληρώματος στις νέες μεταβλητές u και v είναι (βλ. Σχήμα 4.19)

$$D'=\{(u,v):\ 1+v\le u\le 2+v \ \text{ και } \ 1\le v\le 3\}.$$



Σχήμα 4.19 *Το χωρίο D' του Παραδείγματος 4.15 στις μεταβλητές u και v*

Η ιακωβιανή των σχέσεων αυτών είναι

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{vmatrix}=-\frac{u}{v^2}$$

Έτσι, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.2,

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy &= \int_1^3\left[\int_{1+v}^{2+v}u\left(-\frac{u}{v^2}\right)du\right]dv=\int_1^3-\frac{1}{v^2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{1+v}^{2+v}dv=\int_1^3-\frac{1}{3v^2}\left[(2+v)^3-(1+v)^3\right]dv\\ &= \int_1^3-\frac{3v^2+9v+7}{3v^2}dv=-\int_1^3\left(1+\frac{3}{v}+\frac{7}{3v^2}\right)dv=-\left[v-\ln v-\frac{7}{3v}\right]=-\ln 27-\frac{32}{9}\end{aligned}$$

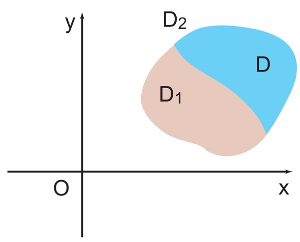
Παρατήρηση 4.4 *Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)dxdy$ από τη σχέση*

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)dxdy+\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

ή

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_2} f(x,y)dxdy-\iint_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

όπου D_1 και D_2 χωρία, τέτοια ώστε το D_2 να χωρίζεται στα D και D_1 (βλ. Σχήμα 4.20), τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία και στα οποία να μπορεί να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$.



Σχήμα 4.20 *Το χωρίο D_2 χωρίζεται στα χωρία D και D_1.*