$$G(s) = \frac{C}{RCs+1}u(t)$$

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, η απόκριση του κυκλώματος σε βηματική είσοδο $v_i(t) = Eu(t)$ (το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t) είναι

$$q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

8.8.3 Γραμμικά σύστηματα δεύτερης τάξης

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε γραμμικά σύστηματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή σύστηματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης της μορφής

$$a_2x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = v(t), \qquad (i)$$

όπου $v(t)$ και $x(t)$ η είσοδος και έξοδος του συστήματος και a_0, a_1, a_2 σταθερές.
Τέτοια συστήματα συναντούμε σε πάρα πολλούς τομείς εφαρμογών, όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα (βλ. Παραδείγματα 8.58-59) και οι χημικές διεργασίες (βλ. Ενότητα 8.8.6).

Η (i) γράφεται στη μορφή

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = \frac{v(t)}{a_2} \qquad (ii)$$

όπου $\gamma = \dfrac{a_1}{2a_2}$ και $\omega^2 = \dfrac{a_0}{a_2}$ σταθερές

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της (ii), λόγω των Προτάσεων 8.1, 8.2 και 8.3, προκύπτει

$$s^2X(s) + 2\gamma sX(s) + \omega^2X(s) = \frac{V(s)}{a_2} \Leftrightarrow \left(s^2 + 2\gamma s + \omega^2\right)X(s) = \frac{V(s)}{a_2}$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{1}{a_2(s^2 + 2\gamma s + \omega^2)}.$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.8, η απόκριση του συστήματος αυτού σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$X(s) = G(s)U(s),$$

όπου $U(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης εισόδου $u(t)$.
Η εύρεση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace της $X(s)$ εξαρτάται από το αν ο παρονομαστής έχει δύο πραγματικές, μία διπλή ή δύο μιγαδικές ρίζες, δηλαδή από το πρόσημο της διακρίνουσας

$$\Delta = (2\gamma)^2 - 4\omega^2.$$

Έτσι, αναλύοντας τον $G(s)$ σε μερικά κλάσματα και με τη βοήθεια της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2, προκύπτει:

- Αν $\gamma > \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τις δύο πραγματικές ρίζες

$$\rho_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \omega^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a_2(s+\rho_1)(s+\rho_2)}\right\} = \frac{1}{a_2}\left(\tau\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\rho_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+\rho_1}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{a_2}\left(Ae^{-\rho_1 t} + Be^{-\rho_1 t}\right)u(t), \qquad A, B \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

- Αν $\gamma = \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τη διπλή ρίζα $\rho = -\gamma$, οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a_2(s+\rho_1)(s+\rho_2)}\right\} = \frac{1}{a_2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\rho}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{(s+\rho)^2}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{a_2}\left(Ae^{-\rho t} + Bte^{-\rho t}\right)u(t), \qquad A, B \text{ σταθερές.} \end{aligned}$$

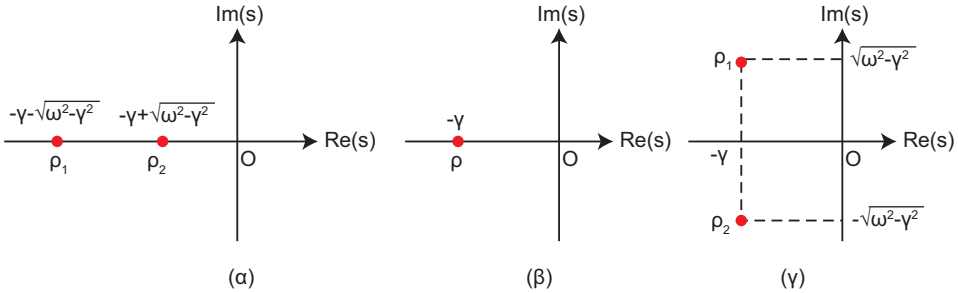
- Αν $\gamma < \omega_0$, ο παρονομαστής έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$\rho_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a_2(s+\rho_1)(s+\rho_2)}\right\} = \frac{1}{a_2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+\rho_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+\rho_2}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{a_2}\left(Ae^{-\rho_1 t} + Be^{-\rho_2 t}\right)u(t), \qquad A, B \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 8.23 δίνεται το διάγραμμα πόλων για τις τρεις περιπτώσεις γραμμικού συστήματος δεύτερης τάξης.



Σχήμα 8.23 *Διάγραμμα πόλων για γραμμικό σύστημα δεύτερης τάξης στις περιπτώσεις: α) υπεραποσβεσμένης, β) κρίσιμα αποσβεσμένης και γ) υποαποσβεσμένης απόκρισης*

Δείξαμε, λοιπόν, ότι:

Πρόταση 8.26 *Ένα γραμμικό σύστημα β΄ τάξης με είσοδο $v(t)$ και έξοδο $x(t)$, που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση*

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = \frac{v(t)}{a_2},$$

έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$G(s) = \frac{1}{a_2(s^2 + 2\gamma s + \omega^2)}$$

και η απόκριση του σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι της μορφής:

- *Αν $\gamma > \omega$ (**υπεραποσβεσμένη απόκριση**),*

$$x(t) = c_1 e^{-\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

- *Αν $\gamma = \omega$ (**κρίσιμα αποσβεσμένη απόκριση**),*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\gamma t}, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές.}$$

- *Αν $\gamma < \omega$ (**υποαποσβεσμένη απόκριση**),*

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\, t\right), \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές.}$$

Παράδειγμα 8.60 *Το σώμα Σ μάζας m, που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k (βλ. Σχήμα 8.24) δέχεται, εκτός της δύναμης του ελατηρίου, μία δύναμη ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας του και μία δύναμη $f(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού.*

β) Αν $m = 1$, $b = 3$, $k = 2$ και η δύναμη είναι

$$f(t) = 3\sin 2t$$

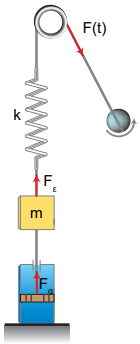
και το σώμα ξεκινάει ακίνητο τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = 6$, να βρεθεί η θέση του συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

α) Το Σ, εκτός της δύναμης ελατηρίου $F_\epsilon = -kx$, δέχεται τη δύναμη απόσβεσης

$$F_a = -bv(t) = -bx'(t)$$

όπου $x(t)$ η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και τη δύναμη f.



Σχήμα 8.24 *Σύστημα σώματος-ελατηρίου-αποσβέστη -διεγέρτη*

Έτσι, από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής προκύπτει ότι

$$mx'' = -kx - bx' + f(t)$$

ή

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m} \qquad (i)$$

όποτε το σύστημα αυτό με είσοδο τη δύναμη $f(t)$ και έξοδο την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας $x(t)$, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m(s^2 + 2\gamma s + \omega^2)}, \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \qquad (ii)$$

β) Ο μετασχηματισμός Laplace της δύναμης $f(t)$ (είσοδος) είναι (βλ. Πίνακα 8.1)

$$F(s) = 3\frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{6}{s^2 + 2^2}.$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4 και την (ii) (αφού αντικαταστήσουμε τις δεδομένες τιμές των παραμέτρων), ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης $x(t)$ είναι

$$X(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\frac{6}{s^2 + 2^2} = \frac{6}{(s+2)(s+3)(s+2i)(s-2i)}$$

και το φορτίο είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $X(s)$,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}, \qquad (iii)$$

Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, αναπτύσσουμε τον $X(s)$ σε μερικά κλάσματα,

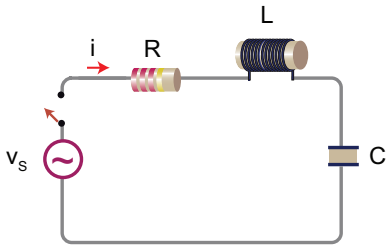
$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma + \Delta i}{s+2i} + \frac{\Gamma - \Delta i}{s-2i}, \qquad (vii)$$

όπου

$$\begin{aligned}
A &= (s+2)X(s)|_{s=-2} = \left.\frac{6}{(s+3)(s+2i)(s-2i)}\right|_{s=-2} = \frac{6}{(-2+3)[(-2)^2+2^2]} = \frac{6}{8} = 0,75 \\
B &= (s+3)F(s)|_{s=-3} = \left.\frac{6}{(s+2)(s+2i)(s-2i)}\right|_{s=-3} = \frac{6}{(-3+2)((-3)^2+4)} = -\frac{6}{13} \\
&= -0,461 \\
\Gamma + \Delta i &= (s+2i)F(s)|_{s=-2i} = \left.\frac{6}{(s+2)(s+3)(s-2i)}\right|_{s=-2i} \\
&= \frac{6}{(-2i+2)(-2i+3)(-2i-2i)} = \frac{6}{(2-10i)(-4i)} = \frac{6}{-40-8i} = \frac{6(-40+8i)}{40^2+8^2} \\
&= -0,144 + 0,029i.
\end{aligned}$$

οπότε
$$\Gamma = -0,144 \quad \text{και} \quad \Delta = 0,029i.$$
Έτσι, η (ii) δίνει
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{(\Gamma+\Delta i)(s-2i)}{(s+2i)(s-2i)} + \frac{(\Gamma-\Delta i)(s+2i)}{(s-2i)(s+2i)} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{2\Gamma s + 2\cdot 2\Delta}{s^2+4} \\ &= \frac{0,75\cdot 10^{-12}}{s+2} - \frac{0,461}{s+3} - \frac{0,288}{s^2+4} + \frac{0,116}{s^2+4}, \end{aligned}$$
οπότε η (i), λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει
$$\begin{aligned} q(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,75\cdot 10^{-12}}{s+2} - \frac{0,461}{s+3} - \frac{0,288}{s^2+4} + \frac{0,116}{s^2+4}\right\} \\ &= 0,75\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 0,461\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 0,288\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + 0,116\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} \\ &= 0,75e^{-2t}u(t) - 0,461e^{-3t}u(t) + 0,116\cos(2t)u(t) + 0,116\sin(2t)u(t) \\ &= \left(0,75e^{-2t} - 0,461e^{-3t} + 0,116\cos 2t + 0,116\sin 2t\right)u(t). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.61 *α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος RLC του Σχήματος 8.25, στο οποίο η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι L, η αντίσταση R, η χωρητικότητα του πυκνωτή C, αν ως έξοδος θεωρηθεί το φορτίο του πυκνωτή.*
β) Αν
$$R = 500\Omega,\ C = \frac{4}{9}\mu F,\ L = 0,01H,$$
και η τάση εισόδου είναι μοναδιαία βηματική
$$v_i(t) = u(t),$$
και ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, να βρεθεί το φορτίο του συναρτήσει του χρόνου.
γ) Να βρεθεί το φορτίο του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου, αν η τάση εισόδου είναι
$$v_i(t) = 2\sin 10t.$$



Σχήμα 8.25 *Κύκλωμα RLC σε σειρά με αρμονική πηγή*

Λύση

α) Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff προκύπτει
$$Li'(t) + Ri(t) + v_C(t) = v_i(t). \qquad (i)$$
Επίσης,
$$i(t) = q'(t) \quad \text{και} \quad v_C(t) = \frac{q(t)}{C},$$
οπότε η (i) γίνεται
$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = v_i(t) \Leftrightarrow q''(t) + \frac{R}{L}q'(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{v_i(t)}{L}$$
όπου $q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή και $v_i(t)$ η τάση εισόδου.
Άρα, το σύστημα αυτό με είσοδο την τάση $v_i(t)$ και έξοδο το φορτίο του πυκνωτή $q(t)$, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης και έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{Q(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{L\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}.$$

β) Ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής τάσης εισόδου $v_i(t) = u(t)$ είναι (βλ. Πίνακα 8.1)

$$V_i(s) = \frac{1}{s}.$$

Επίσης, για τις τιμές αυτές η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος γίνεται

$$G(s) = \frac{1}{10^{-2}\left(s^2 + 5 \cdot 10^4 s + \frac{9}{4}10^8\right)}.$$

Οι ρίζες του παρονομαστή της $G(s)$ είναι ($\Delta = 25 \cdot 10^8 - 4 \cdot \frac{9}{4}10^8 = 16 \cdot 10^8$)

$$s = -4,5 \cdot 10^4 \quad \text{και} \quad s = -0,5 \cdot 10^4,$$

οπότε
$$G(s) = \frac{100}{(s + 4,5 \cdot 10^4)(s + 0,5 \cdot 10^4)}. \qquad (ii)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της τάσης της πηγής $v(t)$, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$V(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace του φορτίου του πυκνωτή είναι

$$Q(s) = G(s)V(s) = \frac{100}{s(s + 4,5 \cdot 10^4)(s + 0,5 \cdot 10^4)} \qquad (iii)$$

και το φορτίο του πυκνωτή είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $Q(s)$,

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}, \qquad (iv)$$

Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$, αναπτύσσουμε τον $Q(s)$ της (i) σε μερικά κλάσματα,

$$Q(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4,5 \cdot 10^4} + \frac{\Gamma}{s + 0,5 \cdot 10^4}, \qquad (v)$$

όπου

$$\begin{aligned}
A &= sQ(s)|_{s=0} = \left.\frac{100}{(s + 4,5 \cdot 10^4)(s + 0,5 \cdot 10^4)}\right|_{s=0} = \frac{100}{4,5 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^4} \\
&= 0,444 \cdot 10^{-6} \\
B &= (s + 4,5 \cdot 10^4)Q(s)\big|_{s=-4,5\cdot 10^4} = \left.\frac{100}{s(s + 0,5 \cdot 10^4)}\right|_{s=-4,5\cdot 10^4} \\
&= \frac{1}{-4,5 \cdot 10^4(-4,5 \cdot 10^4 + 0,5 \cdot 10^4)} = 0,55 \cdot 10^{-5} \\
\Gamma &= (s + 0,5 \cdot 10^4)Q(s)\big|_{s=-0,5\cdot 10^4} = \left.\frac{100}{s(s + 4,5 \cdot 10^4)}\right|_{s=-0,5\cdot 10^4} \\
&= \frac{100}{-0,5 \cdot 10^4(-0,5 \cdot 10^4 + 4,5 \cdot 10^4)} = -0,5 \cdot 10^{-6},
\end{aligned}$$

οπότε η (v) γίνεται

$$Q(s) = \frac{0,444 \cdot 10^{-6}}{s} + \frac{0,55 \cdot 10^{-5}}{s + 4,5 \cdot 10^4} - \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{s + 0,5 \cdot 10^4},$$

Έτσι, η (iv), λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει

$$\begin{aligned}
q(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0,444\cdot 10^{-6}}{s}+\frac{0,55\cdot 10^{-5}}{s+4,5\cdot 10^4}-\frac{0,5\cdot 10^{-6}}{s+0,5\cdot 10^4}\right\}\\
&= 0,444\cdot 10^{-6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+0,55\cdot 10^{-5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4,5\cdot 10^4}\right\}-0,5\cdot 10^{-6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0,5\cdot 10^4}\right\}\\
&= 0,444\cdot 10^{-6}u(t)+0,55\cdot 10^{-5}e^{-4,5\cdot 10^4 t}u(t)-0,5\cdot 10^{-6}e^{-0,5\cdot 10^4 t}u(t)\\
&= \left(0,444\cdot 10^{-6}+0,55\cdot 10^{-5}e^{-4,5\cdot 10^4 t}-0,5\cdot 10^{-6}e^{-0,5\cdot 10^4 t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς είναι πραγματικές, το κύκλωμα είναι περίπτωση συστήματος με υπεραπόσβεση (βλ. Πρόταση 8.26).

γ) Στην περίπτωση αυτή ο μετασχηματισμός Laplace της τάσης της πηγής $v(t)$, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$V(s)=\mathcal{L}\{2\sin 10t\}=\frac{2\cdot 10}{s^2+10^2},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4 και την (ii), ο μετασχηματισμός Laplace του φορτίου του πυκνωτή είναι

$$\begin{aligned}
Q(s) &= G(s)V(s)=\frac{100}{(s+4,5\cdot 10^4)(s+0,5\cdot 10^4)}\frac{20}{s^2+10^2}\\
&= \frac{2000}{(s+4,5\cdot 10^4)(s+0,5\cdot 10^4)(s+10i)(s-10i)}
\end{aligned}$$

και το φορτίο είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $Q(s)$,

$$q(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}, \qquad (vi)$$

Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\}$, αναπτύσσουμε τον $Q(s)$ σε μερικά κλάσματα,

$$Q(s)=\frac{A}{s+4,5\cdot 10^4}+\frac{B}{s+0,5\cdot 10^4}+\frac{\Gamma+\Delta i}{s+10i}+\frac{\Gamma-\Delta i}{s-10i}, \qquad (vii)$$

όπου

$$\begin{aligned}
A &= (s+4,5\cdot 10^4)Q(s)\big|_{s=-4,5\cdot 10^4}=\left.\frac{2000}{(s+0,5\cdot 10^4)(s^2+100)}\right|_{s=-4,5\cdot 10^4}\\
&= \frac{2000}{(-4,5\cdot 10^4+0,5\cdot 10^4)\left[(-4,5\cdot 10^4)^2+100\right]}=-0,247\cdot 10^{-10}\\
B &= (s+0,5\cdot 10^4)Q(s)\big|_{s=-0,5\cdot 10^4}=\left.\frac{2000}{(s+4,5\cdot 10^4)(s^2+100)}\right|_{s=-0,5\cdot 10^4}\\
&= \frac{2000}{(-0,5\cdot 10^4+4,5\cdot 10^4)\left[(-0,5\cdot 10^4)^2+100\right]}=0,2\cdot 10^{-8}\\
\Gamma+\Delta i &= (s+10i)Q(s)\big|_{s=-10i}=\left.\frac{2000}{(s+4,5\cdot 10^4)(s+0,5\cdot 10^4)(s-10i)}\right|_{s=-10i}\\
&= \frac{2000}{(-10i+4,5\cdot 10^4)(-10i+0,5\cdot 10^4)(-10i-10i)}\\
&= \frac{2000}{-10^7-4,5\cdot 10^9 i}=\frac{2000(-10^7+4,5\cdot 10^9 i)}{(-10^7)^2+(-4,5\cdot 10^9)^2}\\
&= 10^{-9}+0,444\cdot 10^{-6}i,
\end{aligned}$$

οπότε $\qquad \Gamma=10^{-9}$ και $\Delta=0,444\cdot 10^{-6}$.

Έτσι, η (ii) δίνει

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{A}{s+4,5\cdot 10^4} + \frac{B}{s+0,5\cdot 10^4} + \frac{(\Gamma+\Delta i)(s-10i)+(\Gamma-\Delta i)(s+10i)}{(s+10i)(s-10i)} \\ &= \frac{A}{s+4,5\cdot 10^4} + \frac{B}{s+0,5\cdot 10^4} + \frac{2\Gamma s+20\Delta}{s^2+100} \\ &= -\frac{0,247\cdot 10^{-10}}{s+4,5\cdot 10^4} + \frac{0,2\cdot 10^{-8}}{s+0,5\cdot 10^4} + \frac{2\cdot 10^{-9}s+20\cdot 0,444\cdot 10^{-6}}{s^2+100}, \end{aligned}$$

οπότε η (vi), λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει

$$\begin{aligned} q(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{0,247\cdot 10^{-10}}{s+4,5\cdot 10^4} + \frac{0,2\cdot 10^{-8}}{s+0,5\cdot 10^4} + \frac{2\cdot 10^{-9}s+20\cdot 0,444\cdot 10^{-6}}{s^2+100}\right\} \\ &= -0,247\cdot 10^{-10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4,5\cdot 10^4}\right\} + 0,2\cdot 10^{-8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+0,5\cdot 10^4}\right\} \\ &\quad +2\cdot 10^{-9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+10^2}\right\} + 0,889\cdot 10^{-5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+10^2}\right\} \\ &= -0,247\cdot 10^{-10}e^{-4,5\cdot 10^4 t}u(t) + 0,2\cdot 10^{-8}e^{-0,5\cdot 10^4 t}u(t) \\ &\quad +2\cdot 10^{-9}\cos(10t)u(t) + 0,889\cdot 10^{-5}\frac{1}{10}\sin(10t)u(t) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.62 *Για την απόκριση $x(t)$ ενός συστήματος που διεγείρεται από μία είσοδο $v(t)$ ισχύει*

$$2x''(t) + 12x'(t) + 18x(t) = 2v(t) - v'(t). \qquad (i)$$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και να χαρακτηριστεί το σύστημα.
β) Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος, αν η είσοδος είναι η μετατοπισμένη βηματική συνάρτηση

$$v(t) = 10u(t-2) \quad \textit{και} \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Λύση

α) Η (i) γράφεται $$2\left[x''(t) + 6x'(t) + 9x(t)\right] = 2v(t) - v'(t).$$

οπότε, το σύστημα αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης και έχει συνάρτηση μεταφοράς ($\gamma = 3, \omega^2 = 9$)

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{2-s}{2(s^2+6s+9)}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει μοναδικό πόλο τη διπλή ρίζα του παρονομαστή

$$s = -3,$$

οπότε, το σύστημα αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης με κρίσιμη απόσβεση.

β) Ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής τάσης εισόδου $v(t) = u(t)$ είναι (βλ. Πίνακα 8.1)

$$V(s) = \frac{e^{-2s}}{s},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της εξόδου $x(t)$ είναι

$$X(s) = G(s)V(s) = \frac{2-s}{2(s^2+6s+9)}\frac{e^{-2s}}{s} = \frac{2-s}{s(s^2+6s+9)}\frac{e^{-2s}}{2} \qquad (ii)$$

και η έξοδος $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}, \qquad (iii)$$

Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$, αναπτύσουμε τη ρητή συνάρτηση της (ii) σε μερικά κλάσματα,

$$X_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+3} + \frac{B_2}{(s+3)^2}, \qquad (iv)$$

$$\begin{aligned}
A &= sX_1(s)\big|_{s=0} = \frac{2-s}{s^2+6s+9}\bigg|_{s=0} = \frac{2}{9} \\
B_2 &= (s+3)^2 X_1(s)\big|_{s=-3} = \frac{2-s}{s}\bigg|_{s=-3} = -\frac{5}{3} \\
B_1 &= \frac{d}{ds}\left[(s+3)^2 X_1(s)\right]_{s=-3} = \frac{d}{ds}\left[\frac{2-s}{s}\right]_{s=-3} = -\frac{2}{s^2}\bigg]_{s=-3} = -\frac{2}{9},
\end{aligned}$$

οπότε από τις (ii) και (iii) προκύπτει ότι

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{2}\left(\frac{2}{9}\frac{1}{s} - \frac{2}{9}\frac{1}{s+3} - \frac{5}{3}\frac{1}{(s+3)^2}\right) = \frac{1}{9}\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+3}e^{-2s} - \frac{5}{6}\frac{1}{(s+3)^2}e^{-2s}$$

Έτσι, η (iv), λόγω της Πρόταση 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9}\frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+3}e^{-2s} - \frac{5}{6}\frac{1}{(s+3)^2}e^{-2s}\right\} \\
&= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-2s}\right\} - \frac{1}{18}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}e^{-2s}\right\} + \frac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}e^{-2s}\right\} \\
&= \frac{1}{9}u(t-2) - \frac{1}{9}e^{-3(t-2)}u(t-2) - \frac{5}{6}te^{-3(t-2)}u(t-2) \\
&= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3(t-2)} - \frac{5}{6}te^{-3(t-2)}\right)u(t-2)
\end{aligned}$$

8.8.4 Γραμμικά συστήματα πρώτης τάξης σε σειρά

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με διαδικασίες που περιλαμβάνουν δύο (ή περισσότερα) γραμμικά σύστηματα πρώτης τάξης που συνδέονται μεταξύ τους, έτσι ώστε η έξοδος του ενός να αποτελεί είσοδο του άλλου.

Παράδειγμα 8.63 *Θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από δύο γραμμικά συστήματα I και II* ***χωρίς αλληλεπίδραση****, όπου η έξοδος του συστήματος I είναι είσοδος του άλλου, που περιγράφονται από τις διαφορικές εξισώσεις*

$$\begin{aligned}
\tau_1 x_1'(t) + x_1(t) &= k_1 v(t) \qquad (i) \\
\tau_2 x_1'(t) + x_2(t) &= k_1 x_1(t) \qquad (ii)
\end{aligned}$$

α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος, θεωρώντας ώς είσοδο την είσοδο $v(t)$ του συστήματος I και ως έξοδο την έξοδο $x_2(t)$ του II, είναι

$$G(s) = \frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}.$$

β) Να χαρακτηριστεί το σύστημα, αφού βρεθούν οι πόλοι του.

γ) Να δειχθεί ότι η απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο $v(t) = u(t)$ είναι

$$x_2(t) = k_1 k_2\left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]u(t).$$

Λύση

α) Θεωρώντας ως είσοδο την $v(t)$ και έξοδο την $x_2(t)$, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}\frac{X_1(s)}{V(s)} = G_{II}(s)G_I(s) \qquad (iii)$$

όπου $G_I(s) = \dfrac{X_1(s)}{V(s)}$ και $G_{II}(s) = \dfrac{X_2(s)}{X_1(s)}$ οι συναρτήσεις μεταφοράς του κάθε συστήματος.

Λόγω της Πρότασης 8.25, τα σύστηματα που περιγράφουν οι (i) και (ii) είναι γραμμικά πρώτης τάξης με συναρτήσεις μεταφοράς

$$G_I(s) = \frac{k_1}{\tau_1 s + 1} \quad \text{και} \quad G_{II}(s) = \frac{k_2}{\tau_2 s + 1}$$

οπότε η (iii) γίνεται

$$G(s) = \frac{k_1}{\tau_1 s + 1}\frac{k_2}{\tau_2 s + 1} = \frac{k_1 k_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}.$$

β) Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει τους δύο πραγματικούς πόλους (ρίζες του παρονομαστή)

$$-\frac{1}{\tau_1} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{\tau_2},$$

το σύστημα αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης με υπεραπόσβεση.

γ) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 8.8, η απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο $u(t)$ είναι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}, \qquad (iv)$$

όπου $U(s)$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της βηματικής εισόδου (βλ. Πίνακα 8.1)

$$U(s) = \frac{1}{s}.$$

οπότε, η (v), λόγω της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2, δίνει

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1 k_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}\right\}. \qquad (v)$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα προκύπτει

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \dfrac{1}{\tau_1}} + \frac{\Gamma}{s + \dfrac{1}{\tau_2}},$$

όπου

$$A = sX(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{\left(s + \dfrac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}\right|_{s=0} = k_1 k_2$$

$$B = \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)X(s)\Big|_{s=-\frac{1}{\tau_1}} = \left.\frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}\right|_{s=-\frac{1}{\tau_1}} = \frac{\tau_1 k_1 k_2}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$\Gamma = \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)sX(s)\Big|_{s=-\frac{1}{\tau_2}} = \left.\frac{\dfrac{k_1 k_2}{\tau_1 \tau_2}}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau_1}\right)}\right|_{s=-\frac{1}{\tau_2}} = \frac{\tau_2 k_1 k_2}{\tau_1 - \tau_2}$$

οπότε η (v), λόγω της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2, γίνεται

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{\tau_1}}+\frac{\Gamma}{s+\frac{1}{\tau_2}}\right\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_1}}\right\}+\Gamma\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_2}}\right\} \\ &= Au(t)+Be^{-\frac{t}{\tau_1}}u(t)+\Gamma e^{-\frac{t}{\tau_2}}u(t) = \left(k_1k_2+\frac{\tau_1k_1k_2}{\tau_2-\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{\tau_2k_1k_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)u(t) \\ &= k_1k_2\left[1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]u(t). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.64 *Θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από δύο γραμμικά συστήματα I και II* ***με αλληλεπίδραση*** *που περιγράφονται από τις διαφορικές εξισώσεις*

$$\begin{aligned} x_1'(t)+ax_1(t)+\beta x_2(t) &= v(t) && (i) \\ x_1'(t)+\gamma x_1(t)+\delta x_2(t) &= 0 && (ii) \end{aligned}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος, θεωρώντας ως είσοδο την $v(t)$ και ως έξοδο την έξοδο $x_2(t)$ του συστήαμτος II και να χαρακτηρισθεί το σύστημα.

Λύση

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace των (i) και (ii) με τη βοήθεια των Προτάσεων 8.1-3 προκύπτει

$$\begin{aligned} sX_1(s)+aX_1(s)+\beta X_2(s) &= V(s) && (iii) \\ sX_2(s)+\gamma X_1(s)+\delta X_2(s) &= 0 && (iv) \end{aligned}$$

όπου $X_1(s)$ και $X_2(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace $x_1(t)$ και $x_2(t)$ και $V(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της $v(t)$.

Λύνοντας την (iv) ως προς X_1 και αντικαθιστώντας στην (iii) προκύπτει

$$s\left(-\frac{s+\delta}{\gamma}X_2(s)\right)+a\left[-\frac{s+\delta}{\gamma}X_2(s)\right]+\beta X_2(s) = V(s)$$

ή

$$\left[-\frac{1}{\gamma}s^2-\left(\frac{\delta}{\gamma}+\frac{a}{\gamma}\right)s-\frac{a\delta}{\gamma}+\beta\right]X_2(s) = V(s),$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{V(s)} = \frac{1}{-\frac{1}{\gamma}s^2-\left(\frac{\delta}{\gamma}+\frac{a}{\gamma}\right)s-\frac{a\delta-\beta\gamma}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{s^2+(\delta+a)s+a\delta-\beta\gamma}$$

■

Στην Ενότητα 8.8.6 δίνουμε εφαρμογές τέτοιων συστημάτων σε χημικές διεργασίες.

Στο Matlab η εισαγωγή της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος και ο υπολογισμός των μηδενικών τιμών και των πόλων καθώς και το διάγραμμα μηδενικών τιμών-πόλων του γίνεται με τις εντολές

```
s=tf('s')
G=G(s)
zero(G)
pole(G)
pzmap(G)
```

Έτσι, για ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s-2}{s^3+4s^2+4s+7}$$

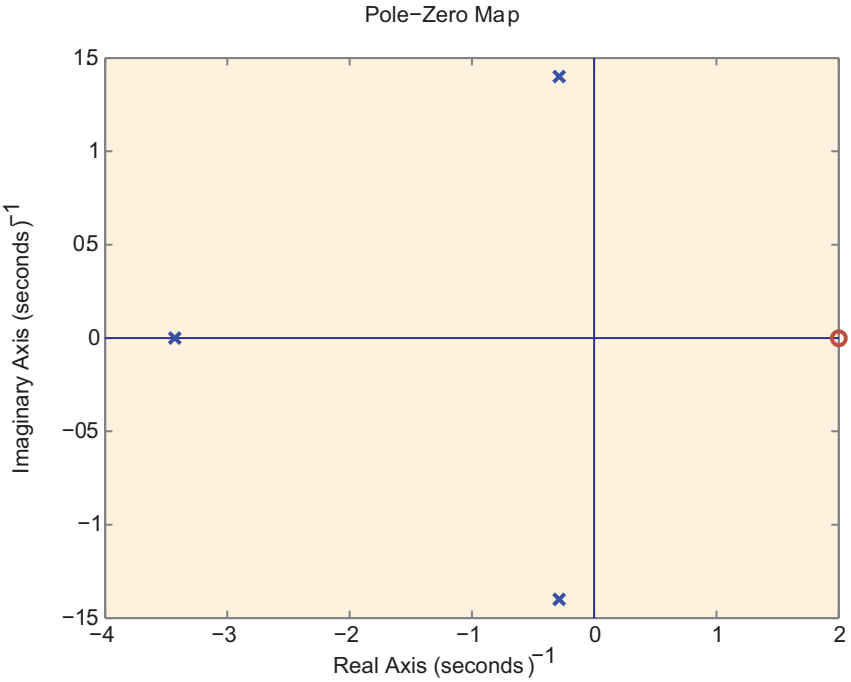
με τις εντολές

```
s=tf('s')
G=(2-s)/ (s^3+4*s^2+4*s+7)
zero(G)
pole(G)
pzmap(G)
```

προκύπτει

```
ans =
2
ans =
-3.4288
-0.2856 + 1.4000i
-0.2856 - 1.4000i
```

καθώς και το διάγραμμα μηδενικών τιμών-πόλων του Σχήματος 8.26ϐ



Σχήμα 8.26 *Διάγραμμα πόλων-μηδενικών από το Matlab*

8.8.5 Κρουστική απόκριση

Ορισμός 8.6 ***Κρουστική απόκριση*** *ενός συστήματος ονομάζουμε την έξοδο του όταν η είσοδος είναι η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ (βλ. Ενότητα 8.3).*

Αν $G(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, τότε, επειδή ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής εισόδου $v(t) = \delta(t)$ είναι

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης $x_\delta(t)$ του συστήματος στην αυτή είσοδο είναι

$$X_\delta(s) = G(s)V(s) = G(s),$$

όπου $G(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, οπότε

$$x_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\},$$

Επομένως, δείξαμε ότι:

Πρόταση 8.27 *Η απόκριση $x_\delta(t)$ ενός συστήματος σε κρουστική είσοδο $\delta(t)$, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς του $G(s)$, οπότε η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης του σε κρουστική είσοδο,*

$$x_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \;\Leftrightarrow\; G(s) = \mathcal{L}\{x_\delta(t)\},$$

Λόγω της πρότασης αυτής, οι μηχανικοί μπορούν να συνάγουν συμπεράσματα για ένα σύστημα που δεν μπορεί να μελετηθεί αναλυτικά, βρίσκοντας πειραματικά την απόκριση του σε κρουστική είσοδο, δηλαδή τη συνάρτηση μεταφοράς του.

Παράδειγμα 8.65 *Να βρεθούν για ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς*

$$G(s) = \frac{8s}{s^2+4}:$$

α) Η κρουστική απόκριση.
β) Η απόκριση του συστήματος σε βηματική τάση εισόδου

$$v(t) = u(t),$$

αν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές.

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.27, η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης μεταφοράς του

$$x_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+4}\right\}. \qquad (i)$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2, η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι

$$x_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+2^2}\right\} = 8\cos 2t\, u(t).$$

β) Ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου $v(t) = u(t)$, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$V(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης του συστήματος σε βηματική τάση εισόδου είναι

$$Q_0(s) = G(s)V(s) = \frac{8s}{s^2+4}\,\frac{1}{s} = \frac{8}{s^2+4}, \qquad (ii)$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 8.15 και του Πίνακα 8.2,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+2^2}\right\} = 8\frac{1}{2}\sin 2t\, u(t) = 4\sin 2t\, u(t).$$

Παράδειγμα 8.66 *Αν η απόκριση $x(t)$ ενός συστήματος που διεγείρεται από μοναδιαία βηματική είσοδο $u(t)$ είναι*

$$x(t) = 100\left(1 - e^{-10t}\right)u(t).$$

να βρεθούν:
α) Η κρουστική απόκριση του συστήματος.
β) Η απόκριση του σε είσοδο

$$v(t) = 2(\sin t)u(t), \quad \text{αν} \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Λύση

α) Από τον Ορισμό 8.4, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)}, \qquad (i)$$

όπου $X(s)$ και $V(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace της απόκρισης του συστήματος $x(t)$ και της εισόδου $v(t)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.1 και τον Πίνακα 8.1

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \\ X(s) &= \mathcal{L}\left\{100\left(1-e^{-10t}\right)u(t)\right\} = 100\left(\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\left\{e^{-10t}u(t)\right\}\right) = 100\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right\} \\ &= \frac{1000}{s(s+10)} \end{aligned}$$

οπότε από την (i) προκύπτει ότι

$$G(s) = \frac{1000}{s+10}.$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ίση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.15 και τον Πίνακα 8.2 είναι

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1000}{s+10}\right\} = 1000\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\} = 1000e^{-10t}.$$

β) Σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου αυτής είναι

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{2(\sin t)u(t)\} = \frac{2}{s^2+1},$$

οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης $x(t)$ του συστήματος είναι

$$X(s) = G(s)V(s) = \frac{1000}{s+10}\frac{2}{s^2+1} = \frac{2000}{(s+10)(s^2+1)}.$$

Έτσι, αναλύοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή αυτή συνάρτηση (αφού παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή)

$$Q(s) = \frac{2000}{(s+10)(s+i)(s-i)} = \frac{A}{s+10} + \frac{B+\Gamma i}{s+i} + \frac{B-\Gamma i}{s-i}, \qquad (ii)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= (s+10)X(s)|_{s=-10} = \left.\frac{2000}{s^2+1}\right|_{s=-10} = \frac{2000}{(-10)^2+1} = 19,802 \\ B+\Gamma i &= (s+i)X(s)|_{s=-i} = \left.\frac{2000}{(s+10)(s-i)}\right|_{s=-i} = \frac{2000}{(-i+10)(-i-i)} = \frac{1000}{-1+10i} \\ &= \frac{1000(-1+10i)}{1^2+10^2} = -9,901 + 99,01i, \end{aligned}$$

οπότε $\qquad B = -9,901 \quad \text{και} \quad \Gamma = 99,01.$

Έτσι, η (ii) δίνει

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s+10} + \frac{B+\Gamma i}{s+i} + \frac{B-\Gamma i}{s-i} = \frac{A}{s} + \frac{(B+\Gamma i)(s-i)+(B-\Gamma i)(s+i)}{(s+i)(s-i)} \\ &= \frac{A}{s+10} + \frac{2Bs+2\Gamma}{s^2+1} = \frac{19,802}{s+10} + \frac{2(-9,901)s + 2\cdot 99,01}{s^2+1}, \end{aligned}$$

οπότε η (i), λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19,802}{s+10}+\frac{2(-9,901)s+2\cdot 99,01}{s^2+1}\right\} \\ &= 19,802\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\}+19,802\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+198,02\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= 19,802e^{-10t}u(t)+19,802\cos(t)u(t)+198,02\sin(t)u(t) \\ &= \left(19,802e^{-10t}+19,802\cos t+198,02\sin t\right)u(t). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.67 *Αν η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι*

$$h(t)=2e^{-3t}u(t),$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση, να βρεθούν:
α) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.
β) Η απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο.
γ) Η απόκριση του συστήματος σε είσοδο

$$v(t)=\cos(2t)u(t).$$

Λύση

α) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.27, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος (βλ. πίνακα 8.1)

$$G(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{2e^{-3t}u(t)\}=2\frac{1}{s+3}.$$

β) Ο μετασχηματισμός Laplace της βηματικής τάσης εισόδου, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$V(s)=\mathcal{L}\{v(t)\}=\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης του συστήματος είναι

$$X(s)=G(s)V(s)=2\frac{1}{s+3}\frac{1}{s}=\frac{2}{s(s+3)}$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα προκύπτει

$$X(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}, \qquad (ii)$$

όπου (βλ. Παράδειγμα 8.35)

$$\begin{aligned} A &= (s)X(s)|_{s=0}=\left.\frac{2}{s+3}\right|_{s=0}=\frac{2}{3} \\ B &= (s+3)F(s)|_{s=-3}=\left.\frac{2}{s}\right|_{s=-3}-\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

οπότε η (ii) δίνει

$$X(s)=\frac{2}{3}\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\frac{1}{s+3}.$$

Έτσι, λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, από την (i) προκύπτει ότι η απόκριση του συστήματος σε βηματική είσοδο είναι

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3}\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\frac{1}{s+3}\right\}=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}=\frac{2}{3}u(t)-\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)=\frac{2}{3}\left(1-e^{-3t}\right)u(t).$$

γ) Ο μετασχηματισμός Laplace της εισόδου στην περίπτωση αυτή, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, είναι

$$V(s)=\mathcal{L}\{v(t)\}=\mathcal{L}\{\cos(2t)u(t)\}=\frac{1}{s^2+2^2},$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης του συστήματος είναι

$$X(s) = G(s)V(s) = \frac{2}{s+3}\frac{1}{s^2+2^2} = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)}.$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα

$$X(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B+\Gamma i}{s+2i} + \frac{B-\Gamma i}{s-2i}, \qquad (ii)$$

όπου

$$\begin{aligned}
A &= (s+3)X(s)|_{s=-3} = \left.\frac{2}{s^2+4}\right|_{s=-3} = \frac{2}{(-3)^2+4} = \frac{2}{13} \\
B+\Gamma i &= (s+2i)F(s)|_{s=-2i} = \left.\frac{2}{(s+3)(s-2i)}\right|_{s=-2i} = \frac{2}{(-2i+3)(-2i-2i)} \\
&= \frac{i}{2(3-2i)} = \frac{i(3+2i)}{2(3^2+2^2)} = \frac{-2+3i}{26},
\end{aligned}$$

οπότε

$$B = -\frac{2}{26} = -\frac{1}{13} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{3}{26}.$$

Έτσι, η (ii) δίνει

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B+\Gamma i}{s+2i} + \frac{B-\Gamma i}{s-2i} = \frac{A}{s} + \frac{(B+\Gamma i)(s-2i)+(B-\Gamma i)(s+2i)}{(s+2i)(s-2i)} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{2Bs+2\cdot 2\Gamma}{s^2+2^2} = \frac{2}{13}\frac{1}{s+3} + \frac{2\left(-\frac{1}{13}\right)s}{s^2+2^2} + \frac{4\cdot\frac{3}{26}}{s^2+2^2} \\
&= \frac{2}{13}\frac{1}{s+3} - \frac{2}{13}\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{6}{13}\frac{1}{s^2+2^2},
\end{aligned}$$

οπότε η (i), λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, δίνει

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{13}\frac{1}{s+3} - \frac{2}{13}\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{6}{13}\frac{1}{s^2+2^2}\right\} \\
&= \frac{2}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{2}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + \frac{6}{13}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} \\
&= \frac{2}{13}e^{-3t}u(t) - \frac{2}{13}\cos(2t)u(t) + \frac{3}{13}\sin(2t)u(t) \\
&= \left(\frac{2}{13}e^{-3t} - \frac{2}{13}\cos 2t + \frac{3}{13}\sin 2t\right)u(t).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.68 *Να βρεθούν για το σύστημα του σώματος Σ μάζας m του Σχήματος 8.27 που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k:*
α) Η συνάρτηση μεταφοράς, το διάγραμμα πόλων και ο χαρακτηρισμός του συστήματος.
β) Η κρουστική απόκριση.
γ) Η απόκριση του συστήματος αν στο σώμα ασκηθεί εκτός της δύναμης του ελατηρίου η κρουστική δύναμη

$$f(t) = f_0\delta(t-t_1)$$

ενώ το σώμα ισορροπεί.

Λύση

α) Από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής προκύπτει ότι, αν στο σώμα ασκείται, εκτός της δύναμης ελατηρίου, και μία δύναμη $f(t)$, τότε

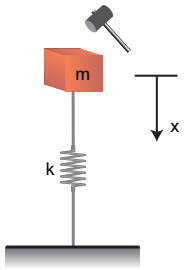
$$mx'' = -kx + f(t)$$

ή

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m} \qquad (i)$$

οπότε, το σύστημα αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι γραμμικό δεύτερης τάξης και έχει συνάρτηση μεταφοράς ($\gamma = 0, \omega^2 = \dfrac{k}{m}$)

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)}.$$

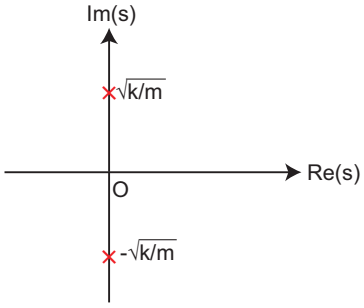


Σχήμα 8.27 *Κρουστική διέγερση συστήματος σώματος-ελατηρίου*

Οι πόλοι του συστήματος είναι οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή οι συζυγείς μιγαδικοί

$$s^2 + \frac{k}{m} = 0 \iff s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}},$$

οπότε, το σύστημα αυτό, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, είναι σύστημα υποκρίσιμης απόσβεσης. Το διάγραμμα πόλων του συστήματος είναι αυτό του Σχήματος 8.27.



Σχήμα 8.28 *Διάγραμμα πόλων συστήματος σώματος-ελατηρίου*

β) Σύμφωνα με την Πρόταση 8.27, η κρουστική απόκριση του συστήματος αυτού, δηλαδή η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας όταν του ασκηθεί η κρουστική δύναμη $\delta(t)$, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{m}\frac{1}{s^2 + \dfrac{k}{m}}\right\} = \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{m}}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)u(t) = \frac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)u(t).$$

γ) Σύμφωνα με τον Πίνακα 8.1, ο μετασχηματισμός Laplace της δύναμης $f(t) = f_0\delta(t - t_1)$ είναι

$$F(s) = \mathcal{L}\{f_0\delta(t - t_1)\} = f_0 e^{-t_1 s},$$

οπότε, λόγω του Ορισμού 8.4 και της (i), ο μετασχηματισμός Laplace της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας στην περίπτωση αυτή είναι

$$X(s) = G(s)F(s) = \frac{f_0}{m}\frac{e^{-t_1 s}}{s^2 + \dfrac{k}{m}}. \qquad (ii)$$

Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$, οπότε, σύμφωνα με την (ii), την Πρόταση 8.15 και τον Πίνακα 8.2,

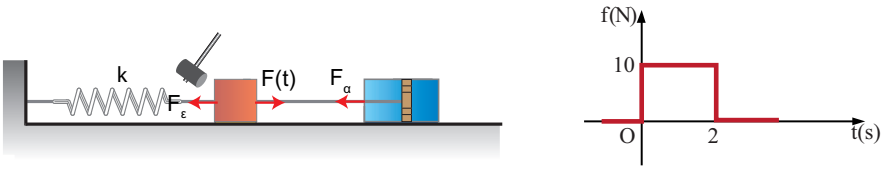
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f_0}{m}\frac{e^{-t_1 s}}{s^2+\frac{k}{m}}\right\} = \frac{f_0}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{k}{m}}\,e^{-t_1 s}\right\}$$

$$= \frac{f_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_1)\right]u(t-t_1) = \frac{f_0}{m}\frac{1}{\sqrt{km}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_1)\right]u(t-t_1).$$

Παράδειγμα 8.69 *Να βρεθούν για το σύστημα του Σχήματος 8.29α, στο οποίο το σώματος Σ μάζας $m = 1Kg$, που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 6\frac{N}{m}$ δέχεται, εκτός της δύναμης του ελατηρίου, μία δύναμη απόσβεσης*

$$F_a = -5v(t),$$

όπου $v(t)$ η ταχύτητα του, και μία εξωτερική δύναμη $f(t)$:
α) Η συνάρτηση μεταφοράς και το διάγραμμα πόλων.
β) Η κρουστική απόκριση.
γ) Αν στο αρχικά ακίνητο στη θέση $x = 0$ σώμα ασκηθεί η δύναμη του Σχήματος 8.29β, να βρεθεί η θέση του συναρτήσει του χρόνου.



(α) (β)

Σχήμα 8.29 *Κρουστική διέγερση συστήματος σώματος-ελατηρίου-αποσβέστη*

Λύση

α) Επειδή το Σ, εκτός της δύναμης ελατηρίου $F_\epsilon = -6x$, δέχεται τη δύναμη απόσβεσης

$$F_a = -5v(t) = -5x'(t)$$

όπου $x(t)$ η θέση του τη χρονική στιγμή t και τη δύναμη f, από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής προκύπτει ότι

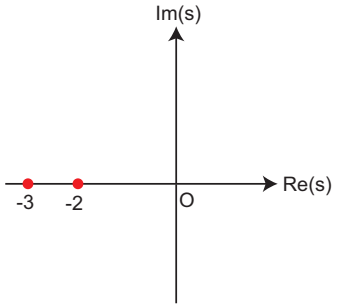
$$mx'' = -6x - 5x' + f(t)$$

ή

$$x'' + 5x' + 6x = f(t)$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 8.26, η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του γραμμικού συστήματος β΄ τάξης είναι

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2+5s+6}. \qquad (i)$$



Σχήμα 8.29β *Διάγραμμα πόλων συστήματος σώματος-ελατηρίου*

Οι πόλοι του συστήματος είναι οι ρίζες του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \Leftrightarrow s = -2, -3,$$

οπότε το διάγραμμα πόλων είναι αυτό του Σχήματος 8.29β.

β) Σύμφωνα με την Πρότασης 8.25, η κρουστική απόκριση του συστήματος αυτου, δηλαδή η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας όταν του ασκηθεί η κρουστική δύναμη $\delta(t)$, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης μεταφοράς, δηλαδή

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \qquad (ii)$$

Αναλύουμε τη συνάρτηση $G(s)$ της (i) σε μερικά κλάσματα (αφού παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή της)

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \qquad (iii)$$

οπότε

$$A = (s+2)G(s)|_{s=-2} = \left.\frac{1}{s+3}\right|_{s=-2} = 1$$

$$B = (s+3)G(s)|_{s=-3} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-3} = -1,$$

οπότε η (iii) γίνεται $$G(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}.$$

Έτσι, λόγω της Πρότασης 8.15 και με τη βοήθεια του Πίνακα 8.2, η (ii) δίνει

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \\ &= \left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t) \end{aligned}$$

γ) Η δύναμη του Σχήματος 8.29β, με τη βοήθεια βηματικών συναρτήσεων γράφεται ως (βλ. Παράδειγμα 8.20)

$$f(t) = 10\,[u(t) - u(t-2)],$$

οπότε, με τη βοήθεια της Πρότασης 8.1 και του Πίνακα 8.1, ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ είναι

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{10\,[u(t) - u(t-2)]\} = 10\mathcal{L}\{u(t)\} - 10\mathcal{L}\{u(t-2)\} \\ &= 10\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right) = 10\,\frac{1-e^{-2s}}{s}. \end{aligned}$$

Έτσι, σύμφωνα με τον Ορισμό 8.4, ο μετασχηματισμός Laplace της απόκρισης του συστήματος $x(t)$ (απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισοροπίας) είναι

$$X(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}\,10\frac{1-e^{-2s}}{s} = \frac{10}{s(s^2+5s+6)}\,(1-e^{-2s}). \qquad (iv)$$

Αναλύουμε το κλάσμα της (iv) σε μερικά κλάσματα (αφού παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή)

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{\Gamma}{s+3} \qquad (v)$$

$$A = sG(s)|_{s=0} = \left.\frac{10}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=0} = \frac{10}{2\cdot 3} = \frac{10}{6}$$

$$B = (s+2)G(s)|_{s=-2} = \left.\frac{10}{s(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{10}{-2(-2+3)} = -5$$

$$\Gamma = (s+3)G(s)|_{s=-3} = \left.\frac{1}{s(s+2)}\right|_{s=-3} = \frac{1}{-3(-3+2)} = \frac{10}{3},$$

οπότε η (v) γίνεται $$G(s) = \frac{10}{6}\frac{1}{s} - 5\frac{1}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+3}$$

και η (iv)

$$\begin{aligned} X(s) &= \left(\frac{10}{6}\frac{1}{s} - \frac{5}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+3}\right)(1-e^{-2s}) \\ &= \frac{5}{3}\frac{1}{s} - \frac{5}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+3} - \frac{10}{6}\frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{5}{s+2}e^{-2s} - \frac{10}{3}\frac{1}{s+3}e^{-2s}. \end{aligned}$$

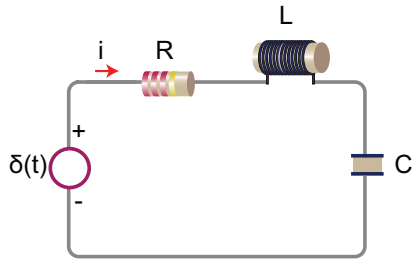
Έτσι, από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, την Πρόταση 8.15 και τον Πίνακα 8.2,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{3}\frac{1}{s} - \frac{5}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{1}{s+3} - \frac{5}{3}\frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{5}{s+2}e^{-2s} - \frac{10}{3}\frac{1}{s+3}e^{-2s}\right\} \\ &= \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-2s}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}e^{-2s}\right\} \\ &\quad -\frac{10}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}e^{-2s}\right\} \\ &= \frac{5}{3}u(t) - 5e^{-2t}u(t) + \frac{10}{3}e^{-3t}u(t) - \frac{5}{3}u(t-2) + 5e^{-2(t-2)}u(t-2) - \frac{10}{3}e^{-3(t-2)}u(t-2) \\ &= \left(\frac{5}{3} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-3t}\right)u(t) + \left(-\frac{5}{3} + 5e^{-2(t-2)} - \frac{10}{3}e^{-3(t-2)}\right)u(t-2) \\ &= \begin{cases} \frac{5}{3} - 5e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-3t}, & 0 < t < 2 \\ -5e^{-2t} + \frac{10}{3}e^{-3t} + 5e^{-2(t-2)} - \frac{10}{3}e^{-3(t-2)}, & t > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.70 *Αν η κρουστική απόκριση του RLC κυκλώματος του Σχήματος 8.30, θεωρώντας ως έξοδο την τάση του πυκνωτή, είναι*

$$v_C(t) = 2\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)u(t),$$

να βρεθούν οι τιμές της αυτεπαγωγής του πηνίου, της αντίστασης και της χωρητικότητας του πηνίου.



Σχήμα 8.30 *Κρουστική διέγερση κυκλώματος RLC*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος αυτού είναι ίση με το μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης του, δηλαδή

$$G(s) = \mathcal{L}\{v_C(t)\} = \mathcal{L}\left\{2\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)u(t)\right\} \qquad (i)$$

Λόγω της Πρότασης 8.1 και του Πίνακα 8.1, από την (i) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} G(s) &= 2\mathcal{L}\left\{e^{-3t}u(t)\right\} - 2\mathcal{L}\left\{e^{-5t}u(t)\right\} = 2\frac{1}{s+3} - 2\frac{1}{s+5} = 2\frac{2}{(s+3)(s+5)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}s^2 + 2s + \frac{15}{4}}. \end{aligned} \qquad (ii)$$

Στο Παράδειγμα 8. 59 δείχνουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του RLC κυκλώματος αυτού είναι

$$G(s) = \frac{1}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}. \qquad (iii)$$

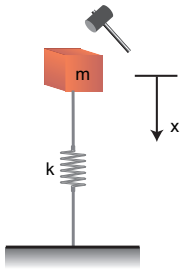
Από τις (ii) και (iii) προκύπτει ότι

$$L = \frac{1}{4}H, \quad R = 2\Omega \quad \text{και} \quad \frac{1}{C} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow C = \frac{4}{15}F.$$

Παράδειγμα 8.71 *Αν η κρουστική απόκριση του συστήματος σώματος-ελατηρίου του Σχήματος 8.31 (απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας $x(t)$) είναι*

$$x(t) = 10sin(2t)u(t),$$

να βρεθούν οι τιμές της μάζας m του σώματος και της σταθεράς k του ελατηρίου.



Σχήμα 8.31 *Κρουστική διέγερση συστήματος σώματος-ελατηρίου*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 8.25, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού είναι ίση με το μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης του, δηλαδή

$$G(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{10sin(2t)u(t)\} \qquad (i)$$

Λόγω της Πρόταση 8.1 και του Πίνακα 8.1, από την (i) προκύπτει ότι

$$G(s) = 10\mathcal{L}\{sin(2t)u(t)\} = 10\frac{1}{2}\frac{1}{s^2 + 2^2} = \frac{1}{\frac{1}{5}s^2 + \frac{4}{5}}. \qquad (ii)$$

Λόγω του Παραδείγματος 8.58 η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος αυτού είναι

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + k}. \qquad (iii)$$

Από τις (ii) και (iii) προκύπτει ότι

$$m = \frac{1}{5} = 0,2Kg, \quad \text{και} \quad k = \frac{4}{5} = 0,8\,\frac{N}{m}.$$

8.8.6 Ευστάθεια

Η ευστάθεια ενός συστήματος είναι μία πολύ σημαντική έννοια για τους μηχανικούς. Ένα σύστημα είναι ευσταθές όταν η απόκρισή του χωρίς είσοδο είναι μηδενική ή τείνει στο μηδέν καθώς περνάει ο χρόνος. Γενικότερα μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 8.7 *Ένα σύστημα λέγεται **ευσταθές** αν η απόκρισή του σε μία πεπερασμένη είσοδο είναι πεπερασμένη, διαφορετικά λέγεται **ασταθές**.*

Ισχύει, επίσης, η επόμενη πρόταση, που μπορεί να θεωρηθεί και ισοδύναμος ορισμός της ευστάθειας.